סטטיסטיקה א

תוכן העניינים

תוכן העניינים

סטטיסטיקה א

פרק 1 - יסודות ההסתברות

תוכן העניינים

הגדרות יסודיות:

רקע:

ניסוי מקרי: תהליך לו כמה תוצאות אפשריות. התוצאה המתקבלת נודעת רק לאחר ביצוע התהליך. למשל: תוצאה בהטלת קובייה, מזג האוויר בעוד שבועיים.

מרחב מדגם: כלל התוצאות האפשריות בניסוי המקרי. לדוגמה, בהטלת קובייה: $\{1,2,3,4,5,6\}$, או: מזג האוויר בעוד שבועיים: {נאה, שרבי, מושלג, גשום, מעונן חלקית, אביך}.

מאורע: תת קבוצה מתוך מרחב במדגם. מסומן באותיות: C , B , A. בהטלת קובייה למשל, המאורע 'לקבל לפחות 5' יסומן: $A=\{5,6\}$. המאורע 'לקבל תוצאה זוגית' יסומן: $B=\{2,4,6\}$.

גודל מרחב המדגם: מספר התוצאות האפשריות במרחב המדגם. בהטלת קובייה למשל נקבל: $|\Omega|=6$.

גודל המאורע: מספר התוצאות האפשריות במאורע עצמו. למשל, בהטלת הקובייה האירועים הקודמים יסומנו: $|A|=2$, $|B|=3$.

מאורע משלים: מאורע המכיל את כל התוצאות האפשריות במרחב המדגם פרט לתוצאות במאורע אותו הוא משלים. למשל, בהטלת הקובייה: $\bar{A}=\{1,2,3,4\}$, $\bar{B}=\{1,3,5\}$.

מרחב מדגם אחיד (סימטרי): מרחב מדגם בו לכל התוצאות במרחב המדגם יש את אותה עדיפות , אותה סבירות למשל, קובייה הוגנת, אך לא כמו מזג האוויר בשבוע הבא.

הסתברות במרחב מדגם אחיד: במרחב מדגם אחיד הסיכוי למאורע יהיה: $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$.

דוגמה: מה הסיכוי בהטלת קובייה לקבל לפחות 5? $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{2}{6}$.

דוגמה: מה הסיכוי בהטלת קובייה לקבל תוצאה זוגית? $P(B)=\frac{|B|}{|\Omega|}=\frac{3}{6}$.

הסתברות במרחב לא אחיד: תחושב לפי השכיחות היחסית: $\frac{f}{n}$.

דוגמה:

להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת:

הציון – x	מספר התלמידים – השכיחות – f
5	2
6	4
7	8
8	5
9	4
10	2

מה ההסתברות שתלמיד אקראי שניבחר בכיתה קיבל את הציון 8? $\frac{f}{n}=\frac{5}{25}=0.2$.

מה ההסתברות שתלמיד אקראי שניבחר בכיתה יכשל? $\frac{f}{n}=\frac{2}{25}=0.08$.

הסתברות למאורע משלים: הסתברות לקבוצת המשלים של המאורע ביחס למרחב המדגם: $P(\bar{A})=1-P(A)$. למשל, בדוגמה הקודמת הסיכוי לעבור את הבחינה יכול להיות מחושב לפי הסיכוי להיכשל: $P(A)=1-\frac{2}{25}=\frac{23}{25}$.

שאלות:

1) מהאותיות E, F ו-G יש ליצור מילה בת 2 אותיות, לא בהכרח בת משמעות.
   א. הרכיבו את כל המילים האפשריות.
   ב. רשמו את המקרים למאורע:
      i. במילה נמצאת האות E.
      ii. במילה האותיות שונות.
   ג. רשמו את המקרים למאורע $\bar{A}$.

2) מטילים זוג קוביות.
   א. רשמו את מרחב המדגם של הניסוי. האם מרחב המדגם אחיד?
   ב. רשמו את כל האפשרויות לאירועים הבאים:
      i. סכום התוצאות 7.
      ii. מכפלת התוצאות 12.
   ג. חשבו את הסיכויים לאירועים שהוגדרו בסעיף ב'.

3) נבחר באקראי ספרה מבין הספרות 0-9.
   א. מה ההסברות שהספרה שנבחרה גדולה מ-5?
   ב. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה היא לכל היותר 3?
   ג. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה היא אי זוגית?

4) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה עבור כל משפחה בישוב מסוים:

מספר משפחות	22	28	18	22	10
מספר מקלטים	0	1	2	3	4

נבחרה משפחה באקראי מהישוב.
   א. מה ההסתברות שאין מקלטים למשפחה?
   ב. מה ההסתברות שיש מקלטים למשפחה?
   ג. מה ההסתברות שיש לפחות 3 מקלטים למשפחה?

5) להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה ביישוב "עדן":

מספר משפחות	20	40	100	30	10
מספר מכוניות	0	1	2	3	4

נבחרה משפחה אקראית מן הישוב.
   א. מה ההסתברות שאין לה מכוניות?
   ב. מה ההסתברות שבבעלות המשפחה לפחות 3 מכוניות?
   ג. מה הסיכוי שבבעלותה פחות מ-3 מכוניות?

6) נטיל מטבע רגיל 3 פעמים. בצד אחד של המטבע מוטבע עץ ובצד השני פלי.

א. רשמו את מרחב המדגם של הניסוי. האם מרחב המדגם הוא אחיד?

ב. רשמו את כל האפשרויות לאירועים הבאים:

i. התקבל פעם אחת עץ.

ii. התקבל לפחות פלי אחד.

ג. מהו המאורע המשלים ל-D?

ד. חשבו את הסיכויים לאירועים שהוגדרו בסעיפים ב-ג.

תשובות סופיות:

1) א. $\Omega=\{EE,EF,EG,FE,FF,FG,GE,GF,GG\}$.

ב. $A=\{EE,EF,EG,FE,GE\},\ B\{EF,EG,FE,FG,GE,GF\}$.

ג. $\bar{A}=\{FF,FG,GF,GG\}$.

2) א. $\Omega=\begin{Bmatrix}(1,1) & (2,1) & (3,1) & (5,1) & (4,1) & (6,1)\\ (1,2) & (2,2) & (3,2) & (4,2) & (5,2) & (6,2)\\ (1,3) & (2,3) & (3,3) & (4,3) & (5,3) & (6,3)\\ (1,4) & (2,4) & (3,4) & (4,4) & (5,4) & (6,4)\\ (1,5) & (2,5) & (3,5) & (4,5) & (5,5) & (6,5)\\ (1,6) & (2,6) & (3,6) & (4,6) & (5,6) & (6,6)\end{Bmatrix}$.

ב. $A=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$, $C=\{(2,6),(3,4),(4,3),(6,2)\}$.

ג. הסיכוי ל-A: $\frac{1}{6}$. הסיכוי ל-B: $\frac{1}{9}$.

3) א. 0.4. ב. 0.4. ג. 0.5.

4) א. 0.22. ב. 0.78. ג. 0.32.

5) א. 0.1. ב. 0.2. ג. 0.8.

6) א. $\Omega=\{PPP,PPE,PEP,EPP,PEE,EPE,EEP,EEE\}$.

ב. $A=\{PPE,PEP,EPP\}$, $D=\{PPP,PPE,PEP,EPP,PEE,EPE,EEP\}$.

ג. $\bar{D}=\{EEE\}$.

ד. $\frac{1}{8}$.

סטטיסטיקה א

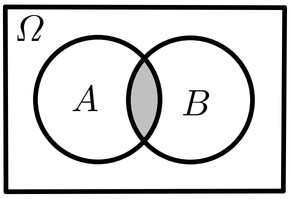
פרק 2 - פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד) - מאורעות זרים ומכילים

תוכן העניינים

פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד) – מאורעות זרים ומכילים:

רקע:

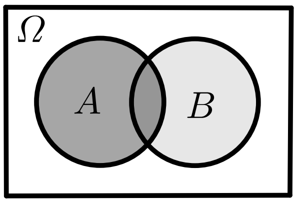
פעולת חיתוך:



נותנת את המשותף בין המאורעות הנחתכים.
חיתוך בין המאורע A למאורע B יסומן כך: $A\cap B$.
מדובר בתוצאות שנמצאות ב-A וגם ב-B.

דוגמה:
בהטלת קובייה, למשל, האפשרויות לקבל לפחות 5 הן: $A=\{5,6\}$.
האפשרויות לקבל תוצאה זוגית הן: $B=\{2,4,6\}$.
החיתוך שביניהם הוא: $A\cap B=\{6\}$.

פעולת איחוד:

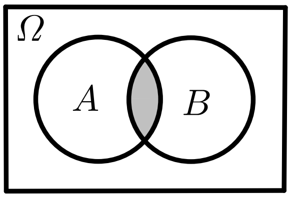


נותנת את כל האפשריות שנמצאות לפחות באחת מהמאורעות, ומסומנת: $A\cup B$.
הפעולה נותנת את אשר נמצא ב-A או B.
כלומר, לפחות אחד מהמאורעות קורה.

דוגמה:
בהטלת קובייה האפשרויות לקבל לפחות 5 הן: $A=\{5,6\}$.
האפשרויות לקבל תוצאה זוגית: $B=\{2,4,6\}$.
האפשרויות לקבל לפחות 5 וגם תוצאה זוגית: $A\cup B=\{2,4,5,6\}$.

דוגמה (הפתרון נמצא בהקלטה):
סטודנט ניגש בסמסטר לשני מבחנים. מבחן בסטטיסטיקה ומבחן בכלכלה. ההסתברות שלו לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הוא 0.9, ההסתברות שלו לעבור את המבחן בכלכלה הוא 0.8 וההסתברות לעבור את המבחן בסטטיסטיקה ובכלכלה היא 0.75.
מה ההסתברות שלו לעבור את המבחן בסטטיסטיקה בלבד?
מה ההסתברות שלו להיכשל בשני המבחנים?
מה ההסתברות לעבור לפחות מבחן אחד?

נוסחת החיבור לשני מאורעות:



ההסתברות של איחוד מאורעות תחושב ע״י הקשר הבא:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

חוקי דה מורגן לשני מאורעות:

$$\overline{A\bigcup B}=\bar{A}\bigcap\bar{B}$$

$$\overline{A\bigcap B}=\bar{A}\bigcup\bar{B}$$

$$P(A\bigcap B)=1-P\left(\bar{A}\bigcup\bar{B}\right)$$

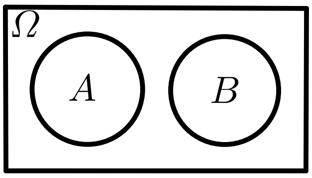
$$P(A\bigcup B)=1-P\left(\bar{A}\bigcap\bar{B}\right)$$

שיטת ריבוע הקסם:

השיטה רלבנטית רק אם יש שני מאורעות במקביל בדומה לתרגיל הקודם:

	$\bar{A}$	A	
B	$P(\bar{A}\cap B)$	$P(A\cap B)$	$P(B)$
$\bar{B}$	$P(\bar{A}\cap\bar{B})$	$P(A\cap\bar{B})$	$P(\bar{B})$
	$P(\bar{A})$	$P(A)$	1

מאורעות זרים:



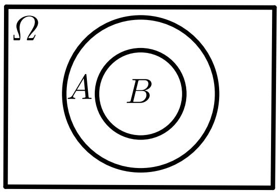
מאורעות זרים הם כאשר אין להם אף איבר משותף:
$A\cap B=\{\ \}$. כלומר, הם לא יכולים להתרחש בו זמנית.

ההסתברות של חיתוך המאורעות היא אפס: $P(A\cap B)=0$.

ההסתברות של איחוד המאורעות תחושב: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

דוגמה:
בהטלת קובייה, האפשרויות לקבל לפחות 5 הן: $A=\{5,6\}$ והאפשרות לקבל 3
היא: $B=\{3\}$, ולכן החיתוך ביניהם הוא אפס, כלומר: $A\cap B=\{\ \}$.

מאורעות מוכלים:



נתונים שני מאורעות A ו-B, השונים מאפס.
נאמר שהמאורע B מוכל במאורע A אם כל איברי המאורע B כלולים במאורע A ונרשום: $B \subset A$.

מאורע A מכיל את מאורע B כל התוצאות שנמצאות ב-B מוכלות בתוך מאורע A.

קשר זה מסומן באופן הבא: $B \subset A$.

$$A \cap B = B \quad P(A \cap B) = P(B)$$
$$A \cup B = A \quad P(A \cup B) = P(A)$$

למשל: $\begin{array}{l} A=\{2,4,6\} \\ B=\{2,4\} \end{array}$.

שאלות:

1) מהאותיות E, F ו-G יוצרים מילה בת 2 אותיות – לא בהכרח בת משמעות.
נגדיר את המאורעות הבאים:
A - במילה נמצאת האות E.
B - במילה אותיות שונות.
א. רשמו את כל האפשרויות לחיתוך A עם B.
ב. רשמו את כל האפשרויות לאיחוד של A עם B.

2) תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה.
נגדיר את המאורעות הבאים:
A - לעבור את המבחן בסטטיסטיקה.
B - לעבור את המבחן בכלכלה.
היעזרו בפעולות חיתוך, איחוד ומשלים בלבד כדי להגדיר את המאורעות הבאים וסמנו בדיאגראמת וון את השטח המתאים:
א. התלמיד עבר רק את המבחן בכלכלה.
ב. התלמיד עבר רק את המבחן בסטטיסטיקה.
ג. התלמיד עבר את שני המבחנים.
ד. התלמיד עבר לפחות מבחן אחד.
ה. התלמיד נכשל בשני המבחנים.
ו. התלמיד נכשל בכלכלה.

3) נתבקשתם לבחור ספרה באקראי. נגדיר את A להיות הספרה שנבחרה היא זוגית. נגדיר את B להיות הספרה שנבחרה קטנה מ-5.
א. רשמו את כל התוצאות למאורעות הבאים:
A , B , $\overline{B}$, $A\cap B$, $A\cup B$.
ב. חשבו את ההסתברויות לכל המאורעות מהסעיף הקודם.

4) נסמן ב-Ω את מרחב המדגם וב-ϕ קבוצה ריקה.
נתון כי A הינו מאורע בתוך מרחב המדגם.
להלן מוגדרים מאורעות שפתרונם הוא Ω או ϕ או A.
קבעו עבור כל מאורע מה הפתרון שלו:
$\overline{\overline{A}}$, $A\cap\phi$, $A\cup\phi$, $A\cap\Omega$, $A\cup\Omega$, $A\cap\overline{A}$, $\overline{\phi}$, $A\cup\overline{A}$.

5) הוגדרו המאורעות הבאים:
A - אדם שגובהו מעל 1.7 מטר
B - אדם שגובהו מתחת ל-1.8 מטר.
קבעו את גובהם של האנשים הבאים:
א. $A \cap B$.
ב. $A \cup B$.
ג. $\overline{A} \cap B$.
ד. $\overline{A} \cup \overline{B}$.
ה. $\overline{\overline{A}}$.

6) נגדיר את המאורעות הבאים:
A - אדם דובר עברית.
B - אדם דובר ערבית.
C - אדם דובר אנגלית.
השתמשו בפעולות איחוד, חיתוך והשלמה לתיאור המאורעות הבאים:
א. אדם דובר את כל שלוש השפות.
ב. אדם דובר רק עברית.
ג. אדם דובר לפחות שפה אחת מתוך השפות הללו.
ד. אדם אינו דובר אנגלית.
ה. קבוצת התלמידים שדוברים שתי שפות בדיוק (מהשפות הנ"ל).

7) שתי מפלגות רצות לכנסת הבאה. מפלגת "גדר" תעבור את אחוז החסימה בהסתברות של 0.08 ומפלגת "עתיד" תעבור את אחוז החסימה בהסתברות של 0.20. בהסתברות של 76% שתי המפלגות לא תעבורנה את אחוז החסימה.
א. מה ההסתברות שלפחות אחת מהמפלגות תעבור את אחוז החסימה?
ב. מה ההסתברות ששתי המפלגות תעבורנה את אחוז החסימה?
ג. מה ההסתברות שרק מפלגות "עתיד" תעבור את אחוז החסימה?

8) במקום עבודה מסוים 40% מהעובדים הם גברים. כמו כן, 20% מהעובדים הם אקדמאים. 10% מהעובדים הינן נשים אקדמאיות.
א. איזה אחוז מהעובדים הם גברים אקדמאיים?
ב. איזה אחוז מהעובדים הם גברים או אקדמאיים?
ג. איזה אחוז מהעובדים הם נשים לא אקדמאיות?

9) הסיכוי של מניה A לעלות הנו 0.5 ביום מסוים והסיכוי של מניה B לעלות ביום מסוים הנו 0.4. בסיכוי של 0.7 לפחות אחת מהמניות תעלה ביום מסוים.
חשבו את ההסתברויות הבאות לגבי שתי המניות הללו ביום מסוים:
א. ששתי המניות תעלנה.
ב. שאף אחת מהמניות לא תעלנה.
ג. שמניה A בלבד תעלה.

10) מטילים זוג קוביות, אדומה ושחורה. נגדיר את המאורעות הבאים:
A - בקובייה האדומה התקבלה התוצאה 4 ובשחורה 2.
B - סכום התוצאות משתי הקוביות הוא 6.
C - מכפלת התוצאות בשתי הקוביות היא 10.
א. האם A ו-B מאורעות זרים?
ב. האם המאורע B מכיל את המאורע A?
ג. האם A ו-C מאורעות זרים?
ד. האם A ו-C מאורעות משלימים?

11) עבור המאורעות A ו-B ידועות ההסתברויות הבאות: $P(A)=0.6$, $P(B)=0.3$, $P(\bar{A}\cap\bar{B})=0.1$.
א. האם A ו-B מאורעות זרים?
ב. חשבו את $P(\bar{A}\cap B)$.

12) מטבע הוטל פעמיים. נגדיר את המאורעות הבאים:
A - קיבלנו עץ בהטלה הראשונה.
B - קיבלנו לפחות עץ אחד בשתי ההטלות.
איזו טענה נכונה?
א. A ו-B מאורעות זרים.
ב. A ו-B מאורעות משלימים.
ג. B מכיל את A.
ד. A מכיל את B.

13) בהגרלה חולקו 100 כרטיסים. על 3 מהם רשום חופשה ועל 2 מהם רשום מחשב שאר הכרטיסים ריקים. אדם קיבל כרטיס אקראי.
א. מה הסיכוי לזכות בחופשה או במחשב? האם המאורעות הללו זרים?
ב. מה ההסתברות לא לזכות בפרס?

14) נתון כי: $P(A)=0.3\ ,\ P(B)=0.25\ ,\ P(A\cup B)=0.49$

א. חשבו את הסיכוי ל-$P(A\cap B)$.

ב. האם A ו-B מאורעות זרים?

ג. מה ההסתברות שרק A יקרה או שרק B יקרה?

15) A ו-B מאורעות זרים. נתון ש: $2\cdot P(B\cap\overline{A})=P(A\cap\overline{B})=P(\overline{A}\cap\overline{B})$.

מה הסיכוי למאורע A ומה ההסתברות למאורע B?

16) קבעו אילו מהטענות הבאות נכונות:

א. $A\cap B=B\cap A$.

ב. $\overline{A\cup B}=A\cap B$.

ג. $A\cap B\cap C=A\cap B\cap(C\cup B)$.

ד. $\overline{A\cap B\cap C}=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$.

17) נתון ש-A ו-B מאורעות במרחב מדגם. נתון ש-$P(A)=0.3\ ,\ P(B)=0.2$.

א. האם יתכן ש-$P(A\cup B)=0.4$?

ב. האם יתכן ש-$P(A\cup B)=0.6$?

ג. אם A ו-B זרים מה הסיכוי $P(A\cup B)$?

ד. אם A מכיל את B מה הסיכוי $P(A\cup B)$?

18) מתוך אזרחי המדינה הבוגרים ל-30% חשבון בבנק הפועלים. ל-28% חשבון בבנק לאומי ול-15% חשבון בבנק מזרחי. כמו כן נתון כי 6% מחזיקים חשבון בבנק לאומי ובבנק הפועלים. ל-5% חשבון בבנק פועלים ומזרחי. ול-4% חשבון בבנק לאומי ומזרחי. כמו כן ל-1% מהאוכלוסייה הבוגרת חשבון בנק בשלושת הבנקים יחד.

א. מה אחוז האזרחים להם חשבון בבנק לאומי בלבד?

ב. מה ההסתברות שאזרח כלשהו יחזיק חשבון בבנק פועלים ולאומי אבל לא בבנק מזרחי?

ג. מה ההסתברות שלאזרח יהיה חשבון בפועלים או במזרחי אבל לא בבנק לאומי?

ד. מה אחוז האזרחים שיש להם חשבון בנק אחד בלבד?

ה. מה אחוז האזרחים שיש להם בדיוק חשבון בשני בנקים בלבד?

ו. מה ההסתברות שלאזרח בוגר אין חשבון בנק באף אחד מהבנקים הללו?

ז. לאיזה אחוז מהאזרחים יש חשבון בנק בלפחות אחד מהבנקים הללו?

19) חברה מסוימת פרסמה את הנתונים הבאים לגבי האזרחים מעל גיל 21.
הנתונים שהתקבלו היו: 40% מהאנשים מחזיקים כרטיס "ויזה", 52%
מחזיקים כרטיס "ישראכרט", 20% מחזיקים כרטיס "אמריקן אקספרס",
15% מחזיקים כרטיס ויזה וגם ישראכרט, 8% מחזיקים כרטיס ישראכרט
וגם אמריקן אקספרס ו-7% מחזיקים כרטיס ויזה וגם אמריקן אקספרס.
כמו כן, 13% לא מחזיקים באף אחד משלושת הכרטיסים הנ"ל.

א. מה אחוז מחזיקי שלושת כרטיס האשראי גם יחד?
ב. מה אחוז מחזיקי ישראכרט וויזה אך לא את אמריקן אקספרס?
ג. מה אחוז מחזיקי כרטיס אחד בלבד?

20) הוכיחו: $P\left(\bar{A}\cap\bar{B}\right)=1-P\left(A\right)-P\left(B\right)+P\left(A\cap B\right)$.

21) A ו-B מאורעות במרחב המדגם. האם נכון לומר שהסיכוי שיתרחש בדיוק
מאורע אחד הוא: $P\left(A\right)+P\left(B\right)-2P\left(A\cap B\right)$?

תשובות סופיות:

1) א. $A\cap B=\{EG,EF,FE,GE\}$.
ב. $A\cup B=\{EG,EF,EE,FE,GE,EG,GF\}$.

2) א. $B\cap\bar{A}$. ב. $A\cap\bar{B}$. ג. $A\cap B$. ד. $A\cup B$. ה. $\bar{A}\cap\bar{B}$. ו. $\bar{B}$.

3) א. $A=0,2,4,6,8$, $B=0,1,2,3,4$, $\bar{B}=5,6,7,8,9$,
$A\cap B=0,2,4$, $A\cup B=0,2,4,6,8,1,3$.
ב. $P(A)=0.5$, $P(B)=0.5$, $P(\bar{B})=0.5$, $P(A\cap B)=0.3$, $P(A\cup B)=0.7$.

4) $\bar{\bar{A}}=A$, $A\cap\phi=\phi$, $A\cup\phi=A$, $A\cap\Omega=A$, $A\cup\Omega=\Omega$,
$A\cap\bar{A}=\phi$, $\bar{\phi}=\Omega$, $A\cup\bar{A}=\Omega$.

5) א. $A\cap B$: גובה בין 1.7 ל-1.8. ב. $A\cup B$: כל גובה אפשרי.
ג. $\bar{A}=\bar{A}\cap B$: גובה לכל היותר 1.7. ד. $\bar{A}\cup\bar{B}$: לכל היותר 1.7 או לפחות 1.8.
ה. $A=\bar{\bar{A}}$: גובה מעל 1.7.

6) א. $A\cap B\cap C$. ב. $A\cap\bar{B}\cap\bar{C}$. ג. $A\cup B\cup C$.
ד. $\bar{C}$. ה. $(A\cap B\cap\bar{C})\cup(B\cap C\cap\bar{A})\cup(A\cap C\cap\bar{B})$.

7) א. $P(A\cup B)=0.24$. ב. $P(A\cap B)=0.04$. ג. $P(B\cap\bar{A})=0.16$.

8) א. $P(A\cap B)=10\%$. ב. $P(A\cup B)=50\%$. ג. $P(\bar{A}\cap\bar{B})=50\%$.

9) א. $P(A\cap B)=0.2$. ב. $P(\bar{A}\cap\bar{B})=0.3$. ג. $P(A\cup\bar{B})=0.3$.

10) א. לא. ב. כן. ג. כן. ד. לא.

11) א. כן. ב. $P(\bar{A}\cap B)=0.3$.

12) הטענה הנכונה היא ג'.

13) א. 0.05. ב. 0.95.

14) א. $P(A\cap B)=0.06$. ב. לא. ג. $P((A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{A}))=0.43$.

15) $P(A)=\frac{2}{5}$, $P(B)=\frac{1}{5}$.

16) א. נכון. ב. לא נכון. ג. לא נכון. ד. נכון.

17) א. כן. ב. לא. ג. $P(A\cup B)=0.5$. ד. $P(A\cup B)=0.3$.

18) א. 19%. ב. 0.05. ג. 0.31. ד. 46%. ה. 12%. ו. 0.41.
ז. 59%.

19) א. 5%. ב. 10%. ג. 67%.

20) שאלת הוכחה.

21) נכון.

סטטיסטיקה א

פרק 3 - קומבינטוריקה -כלל המכפלה

תוכן העניינים

קומבינטוריקה – כלל המכפלה:

רקע:

כלל המכפלה:

כלל המכפלה הוא כלל שבאמצעותו אפשר לחשב את גודל המאורע או גודל מרחב המדגם.

אם לתהליך יש k שלבים: n_1 אפשרויות לשלב הראשון, n_2 אפשרויות לשלב השני... n_k אפשרויות לשלב k:

מספר האפשרויות לתהליך כולו יהיה: $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k$

למשל, כמה אפשרויות יש למשחק בו מטילים קובייה וגם מטבע? (הסבר בהקלטה)

$$n_1 = 6 \ , \ n_2 = 2$$
$$n_1 \cdot n_2 = 6 \cdot 2 = 12$$

למשל, כמה לוחיות רישוי בני 5 תווים ניתן ליצור כאשר התו הראשון הוא אות אנגלית והיתר ספרות? (הסבר בהקלטה)

$$n_1 = 26 \ , \ n_2 = 10 \ , \ n_3 = 10 \ , \ n_4 = 10 \ , \ n_5 = 10$$
$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 \cdot n_5 = 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 260,000$$

שאלות:

1) חשבו את מספר האפשרויות לתהליכים הבאים:
   א. הטלת קובייה פעמים.
   ב. מספר תלת ספרתי.
   ג. בחירת בן ובת מכתה שיש בה שבעה בנים ועשר בנות.
   ד. חלוקת שני פרסים שונים לעשרה אנשים שונים כאשר אדם לא יכול לקבל יותר מפרס אחד.

2) במסעדה מציעים ארוחה עסקית.
בארוחה עסקית יש לבחור מנה ראשונה, מנה עיקרית ושתייה.
האופציות למנה ראשונה הן: סלט ירקות, סלט אנטיפסטי ומרק היום.
האופציות למנה עיקרית הן: סטייק אנטריקוט, חזה עוף בגריל, לזניה בשרית ולזניה צמחונית. האופציות לשתייה הן: קפה, תה ולימונדה.
   א. כמה ארוחות שונות ניתן להרכיב בעזרת התפריט הזה?
   ב. אדם מזמין ארוחה אקראית. חשב את ההסתברויות הבאות:
      i. בארוחה סלט ירקות, לזניה בשרית ולימונדה.
      ii. בארוחה סלט, לזניה ותה.

3) בוחרים באקראי מספר בין חמש ספרות. חשבו את ההסתברויות הבאות:
   א. המספר הוא זוגי.
   ב. במספר כל הספרות שונות.
   ג. במספר כל הספרות זהות.
   ד. במספר לפחות שתי ספרות שונות.
   ה. במספר לפחות שתי ספות זהות.
   ו. המספר הוא פלינדרום (מספר הנקרא מימין ומשמאל באות הצורה).

4) חישה אנשים אקראיים נכנסו למעלית בבניין בן 8 קומות.
חשבו את ההסתברויות הבאות:
   א. כולם ירו בקומה החמישית.
   ב. כולם ירדו באותה קומה.
   ג. כולם ירדו בקומה אחרת.
   ד. ערן ודני ירדו בקומה השישית והיתר בשאר הקומות.

5) במפלגה חמישה עשר חברי כנסת. יש לבחור שלושה חברי כנסת לשלושה תפקידים שונים. בכמה דרכים ניתן לחלק את התפקידים הבאים אם:
   א. חבר כנסת יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
   ב. חבר כנסת לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

6) מטילים קובייה 4 פעמים.
   א. מה ההסתברות שכל התוצאות תהינה זהות?
   ב. מה ההסתברות שכל התוצאות תהינה שונות?
   ג. מה ההסתברות שלפחות שתי תוצאות תהינה זהות?
   ד. מה ההסתברות שלפחות שתי תוצאות תהיה שונות?

7) יש ליצור מילה בת חמש אותיות, לא בהכרח עם משמעות מאותיות ה-ABC (26 אותיות).
   א. מה ההסתברות שבמילה שנוצרה אין האותיות D, A ו-L?
   ב. מה ההסתברות שבמילה שנוצרה כל האותיות זהות?
   ג. מה ההסתברות שבמילה שנוצרה לפחות שתי אותיות שונות זו מזו?
   ד. מה ההסתברות שהמילה היא פלינדרום? (מילה אשר משמאל לימין, ומימין לשמאל נקראת אותו הדבר).

8) יוצרים קוד עם a ספרות (מותר לחזור על אותה ספרה בקוד).
חשבו את ההסתברויות הבאות: (בטאו את תשובותיכם באמצעות a).
   א. בקוד אין את הספרה 5.
   ב. בקוד מופיעה הספרה 3.
   ג. בקוד לא מופיעות ספרות אי זוגיות.

9) במשחק מזל יש למלא טופס בו n משבצות. כל משבצת מסומנת בסימן V או X. בכמה דרכים שונות ניתן למלא את טופס משחק המזל?

תשובות סופיות:

1) א. 36. ב. 900. ג. 70. ד. 90.

2) א. 36. ב. i. $\frac{1}{36}$. ב. ii. $\frac{1}{9}$.

3) א. 0.5. ב. 0.3024. ג. 0.0001. ד. 0.9999. ה. 0.6976. ו. 0.01.

4) א. $\frac{1}{8^5}$. ב. $\frac{1}{8^4}$. ג. 0.205. ד. $\frac{1\cdot1\cdot7^3}{8^5}$.

5) א. 3375. ב. 2730.

6) א. $\frac{1}{216}$. ב. $\frac{5}{18}$. ג. $\frac{13}{18}$. ד. $\frac{215}{216}$.

7) א. $\frac{23^5}{26^5}$. ב. $\frac{1}{26^4}$. ג. $1-\frac{1}{26^4}$. ד. $\frac{1}{26^2}$.

8) א. 0.9^a. ב. $1-0.9^a$. ג. 0.5^a.

9) 2^n.

סטטיסטיקה א

פרק 4 - קומבינטוריקה- תמורה - סידור עצמים בשורה

תוכן העניינים

קומבינטוריקה – תמורה – סידור עצמים בשורה:

רקע:

תמורה:

מספר האפשריות לסדר n עצמים שונים בשורה: $n!=1\cdot2\cdot3\cdots(n-1)\cdot n$.

<u>הערה</u>: $0!=1$.

דוגמאות (הפתרונות בהקלטה):

- בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות: a, b, c, d?
- בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות: a, b, c, d, כך שהאותיות: a, b יהיו ברצף?
- בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות: a, b, c, d, כך שהאותיות: a, b יופיעו בתור הרצף ba?

שאלות:

1) חשבו: בכמה אופנים
א. אפשר לסדר 4 ספרים שונים על מדף?
ב. אפשר לסדר חמישה חיילים בטור?

2) סידרו באקראי 10 דיסקים שונים על מדף שמתוכם שניים בשפה העברית.
א. מה ההסתברות שהדיסקים בעברית יהיו צמודים זה לזה?
ב. מה ההסתברות שהדיסקים בעברית לא יהיו צמודים זה לזה?
ג. מה ההסתברות ששני הדיסקים בעברית יהיו כל אחד בקצה השני של המדף?

3) בוחנים 5 בנים ו-4 בנות בכיתה ומדרגים אותם לפי הציון שלהם בבחינה. נניח שאין תלמידים בעלי אותו ציון.
א. מהו מספר הדירוגים האפשריים?
ב. מהו מספר הדירוגים האפשריים אם מדרגים בנים ובנות בנפרד?

4) מסדרים 10 ספרים שונים על מדף.
א. בכמה אופנים ניתן לסדר את הספרים על המדף?

שני ספרים מתוך ה-10 הם ספרים בסטטיסטיקה.
ב. מה ההסתברות שאם נסדר את הספרים באקראי, הספרים בסטטיסטיקה יהיו צמודים זה לזה?
ג. מה ההסתברות שהספרים בסטטיסטיקה לא יהיו צמודים זה לזה?
ד. מה ההסתברות שהספרים בסטטיסטיקה יהיו בקצות המדף (כל ספר בקצה אחר)?

5) אדם יצר בנגן שלו פלייליסט (רשימת השמעה) של 12 שירים שונים. 4 בשפה העברית, 5 באנגלית ו-3 בצרפתית. האדם הריץ את הפלייליסט באקראי.
א. מה ההסתברות שכל השירים באנגלית יופיעו כשירים הראשונים כמקשה אחת?
ב. מה ההסתברות שכל השירים באנגלית יופיעו ברצף (לא חובה ראשונים)?
ג. מה ההסתברות ששירים באותה השפה יופיעו ברצף (כלומר כל השירים באנגלית ברצף, כל השירים בעברית ברצף וכך גם השירים בצרפתית)?

6) 4 בנים ו-4 בנות התיישבו באקראי בשורת כיסאות 1-8 בקולנוע.
א. מה ההסתברות שיוסי ומיכל לא ישבו זה לצד זה?
ב. מה ההסתברות שהבנים יתיישבו במקומות האי-זוגיים?
ג. מה ההסתברות שכל הבנים ישבו זה לצד זה?
ד. מה ההסתברות שהבנים ישבו זה לצד זה והבנות תשבנה זו לצד זו?

תשובות סופיות:

1) א. 24. ב. 120.

2) א. 0.2. ב. 0.8. ג. 0.022.

3) א. 362880. ב. 2880.

4) א. 3628800. ב. 0.2. ג. 0.8. ד. $\frac{1}{45}$.

5) א. $\frac{1}{792}$. ב. $\frac{1}{99}$. ג. $\frac{1}{4620}$.

6) א. 0.75. ב. 0.014. ג. $\frac{1}{14}$. ד. $\frac{1}{35}$.

סטטיסטיקה א

פרק 5 - קומבינטוריקה - תמורה עם עצמים זהים

תוכן העניינים

קומבינטוריקה – תמורה עם עצמים זהים:

רקע:

תמורה עם חזרות:

אם יש בין העצמים שיש לסדר עצמים זהים, יש לבטל את הסידור הפנימי שלהם על ידי חלוקה בסידורים הפנימיים שלהם.

מספר האופנים לסדר n עצמים בשורה, ש- n_1 מהם זהים מסוג 1, n_2 זהים מסוג 2 ו- n_r זהים מסוג r: $\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_r!}$.

דוגמה (תשובה בהקלטה):

כמה מילים ניתן ליצור מכל האותיות הבאות: W, W, T, T, K, K?

שאלות:

1) במשחק יש לצבוע שתי משבצות מתוך המשבצות הבאות:

בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את הצביעה?

2) בכמה אופנים שונים אפשר לסדר בשורה את האותיות: ב, ע, ע, ב, ע, ג?

3) בבית נורות מקום ל-6 נורות. בחרו שתי נורות אדומות, שתי נורות צהובות ושתי נורות כחולות. כמה דרכים שונות יש לסדר את הנורות?

4) נרצה ליצור מספר מכל הספרות הבאות: 1, 2, 2, 2, 6.
כמה מספרים כאלה אפשר ליצור?

5) במשחק בול פגיעה יש 10 משבצות, אדם צובע 4 משבצות מתוך ה-10.
המשתתף השני צריך לנחש אילו 4 משבצות נצבעו.
מה ההסתברות שבניחוש אחד יהיה בול פגיעה?

6) כמה אותות שונים, שכל אחד מורכב מ-10 דגלים שונים, ניתן ליצור,
אם 4 דגלים הם לבנים, 3 כחולים, 2 אדומים ואחד שחור.
דגלים שווי צבע זהים זה לזה לחלוטין.

תשובות סופיות:

1) 10.
2) 60.
3) 90.
4) 20.
5) $\frac{1}{210}$.
6) 12600.

סטטיסטיקה א

פרק 6 - קומבינטוריקה- סידור עצמים במעגל

תוכן העניינים

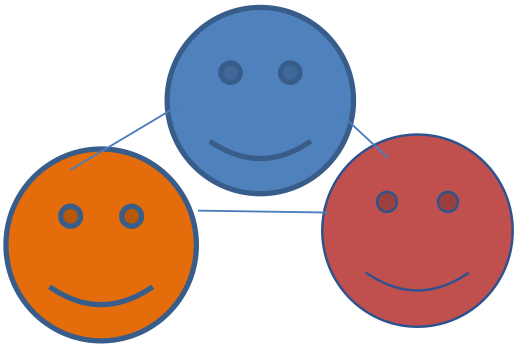
קומבינטוריקה – סידור עצמים במעגל:

רקע:

מספר האפשרויות לסדר n עצמים שונים במעגל בו אין מקומות מסומנים הוא: $(n-1)!$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

דנה, רמה ושדה רוצות ליצור מעגל ריקוד.
בכמה דרכים שונות הן יכולות להחזיק אחת לשנייה את הידיים, כדי ליצור את המעגל?



שאלות:

1) מעצב פנים יצר ללקוחותיו מניפת צבעים המוצגת במעגל.
במניפה 12 צבעים שונים מתוכם 3 בגווני אפור, 3 בגווני לבן, 3 בגווני ירוק ו-3 בגווני צהוב. כמה מניפות שונות ניתן ליצור כאשר:

א. גווני האפור צמודים זה לזה.

ב. צבעים באותו גוון צמודים זה לזה.

2) דני יוצר שרשרת חרוזים הבנויה מעשרה חרוזים בצבעים שונים.
הוא משחיל את עשרת החרוזים באקראי.
חשבו את ההסתברויות הבאות:

א. הסידור יהיה בדיוק כמוראה בציור.

ב. החרוז הלבן והכתום יהיו בסמוך זה לזה.

3) אבא הכין עוגת יומולדת עגולה. הוא סידר 7 נרות כמוראה בשרטוט.
הנרות זהים ונבדלים זה בזה בצבע: 2 כחולים זהים, 2 אדומים זהים, 2 צהובים זהים ו-1 כתום. סידור הנרות נעשה באקראי.
חשבו את ההסתברויות הבאות:

א. הנרות הצהובים סמוכים זה לזה.

ב. נרות באותו צבע סמוכים זה לזה.

4) n בנים ו-n בנות הסתדרו במעגל באקראי.

א. מה הסיכוי שכל הבנים יסתדרו זה לצד זה בלי להתפצל?

ב. מה הסיכוי שכל הבנים יסתדרו זה לצד זה בלי להתפצל וגם כל הבנות יסתדרו זו לצד זו בלי להתפצל?

ג. מה הסיכוי שהסידור יהיה שמימין ומשמאל לכל בן תהיה בת?

תשובות סופיות:

1) א. 2177280. ב. 7776.

2) א. $\frac{1}{9!}$. ב. $\frac{2}{9}$.

3) א. $\frac{1}{3}$. ב. $\frac{1}{15}$.

4) א. $\frac{(n!)^2}{(2n-1)!}$. ב. $\frac{(n!)^2}{(2n-1)!}$. ג. $\frac{(n-1)!(n!)}{(2n-1)!}$.

סטטיסטיקה א

פרק 7 - קומבינטוריקה -דגימה סידורית ללא החזרה ועם החזרה

תוכן העניינים

קומבינטוריקה – דגימה סידורית ללא החזרה ועם החזרה:

רקע:

מדגם סידור בדגימה עם החזרה:

מספר האפשרויות בדגימת k עצמים מתוך n עצמים שונים כאשר הדגימה היא עם החזרה והמדגם סדור הוא: n^k.

דוגמה:

בוחרים שלושה תלמידים מתוך עשרה לייצג ועד בו תפקידים שונים, תלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

כמה ועדים שונים ניתן להרכיב? $10^3=1{,}000$, $k=3$, $n=10$.

מדגם סידור ללא החזרה:

מספר האפשרויות בדגימת k עצמים שונים מתוך n עצמים שונים $(n \geq k)$ כאשר המדגם סדור ואין החזרה של עצמים נדגמים הינו:

$$(n)_k = n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

דוגמה:

שלושה תלמידים נבחרים מתוך 10 לייצג וועד בו תפקידים שונים.

תלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד: $\frac{10!}{7!}=10\cdot 9\cdot 8=720$.

שאלות:

1) במפלגה 20 חברי כנסת, מעוניינים לבחור שלושה חברי כנסת לשלושה תפקידים שונים.
   א. חבר כנסת יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
   כמה קומבינציות ישנן לחלוקת התפקידים?
   ב. חבר כנסת לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
   כמה קומבינציות יש לחלוקת התפקידים?

2) במשחק מזל יש 4 משבצות ממוספרות מ-A-D (A עד D). בכל משבצת יש למלא סיפרה (0-9). הזוכה הוא זה שניחש נכונה את כל הספרות בכל המשבצות בהתאמה.
   א. מה ההסתברות לזכות במשחק?
   ב. מה ההסתברות שבאף משבצת לא תהיה את הספרה 3 במספר הזוכה?
   ג. מה ההסתברות שהתוצאה 4 תופיע לפחות פעם אחת במספר הזוכה?

3) קבוצה מונה 22 אנשים, מה ההסתברות שלפחות לשניים מהם יהיה יום הולדת באותו התאריך?

4) שלושה אנשים קבעו להיפגש במלון הילטון בסינגפור.
   הבעיה היא שבסינגפור ישנם 5 מלונות הילטון.
   א. מה ההסתברות שכל השלושה ייפגשו?
   ב. מה ההסתברות שכל אחד יגיע לבית מלון אחר?

5) בכיתה 40 תלמידים. מעוניינים לבחור חמישה מהם לוועד כיתה.
   בכמה דרכים ניתן להרכיב את הוועד אם :
   א. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
   ב. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

תשובות סופיות:

1) א. 8000. ב. 6840.
2) א. 0.0001. ב. 0.6561. ג. 0.3439.
3) 0.476.
4) א. 0.04. ב. 0.48.
5) א. 40^5. ב. 78,960,960.

סטטיסטיקה א

פרק 8 - קומבינטוריקה - דגימה ללא סדר וללא החזרה

תוכן העניינים

קומבינטוריקה – דגימה ללא סדר וללא החזרה:

רקע:

מדגם לא סדור בדגימה ללא החזרה:

מספר האפשרויות לדגום k עצמים שונים מתוך n עצמים שונים כאשר אין משמעות לסדר העצמים הנדגמים ואין החזרה: $\frac{(n)_k}{k!}=\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!k!}$.

דוגמה:

מתוך 10 תלמידים יש לבחור שלושה נציגים לוועד ללא תפקידים מוגדרים:

$\binom{10}{3}=\frac{10!}{7!\cdot 3!}=120$.

הערות:

1) $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.

2) $\binom{n}{n-1}=\binom{n}{1}=n$.

3) $\binom{n}{n}=\binom{n}{0}=1$.

שאלות:

1) בכיתה 15 בנות ו-10 בנים. יש לבחור 5 תלמידים שונים מהכיתה לנציגות הכיתה. בכמה דרכים אפשר להרכיב את הנציגות, אם:
   א. אין שום הגבלה לבחירה.
   ב. מעוניינים ש-3 בנות ו-2 בנים ירכיבו את המשלחת.
   ג. לא יהיו בנים במשלחת.

2) סטודנט מעוניין לבחור 5 קורסי בחירה בסמסטר זה. לפניו רשימה של 10 קורסים לבחירה: 5 במדעי הרוח, 3 במדעי החברה, 2 במתמטיקה.
   א. כמה בחירות שונות הוא יכול ליצור לעצמו?
   ב. כמה בחירות יש לו בהן 3 קורסים הם ממדעי הרוח?
   ג. כמה בחירות יש לו אם 2 מהן לא ממדעי הרוח?
   ד. כמה בחירות יש לו אם 2 ממדעי הרוח, 2 ממדעי החברה ו-1 ממתמטיקה?

3) בכיתה 30 תלמידים מתוכם 12 תלמידים ו-18 תלמידות.
   יש לבחור למשלחת 4 תלמידים מהכיתה. התלמידים נבחרים באקראי.
   א. מה ההסתברות שהמשלחת תורכב רק מבנות?
   ב. מה ההסתברות שבמשלחת תהיה רק בת אחת?
   ג. מה ההסתברות שבמשלחת תהיה לפחות בת אחת?

4) במשחק הלוטו יש לבחור 5 מספרים מתוך 45. המספרים הם 1-45.
   א. מה ההסתברות שבמשחק הזוכה כל המספרים הם זוגיים?
   ב. מה ההסתברות שבמספר הזוכה יש לכל היותר מספר זוגי אחד?
   ג. מה ההסתברות שבמספר הזוכה לפחות פעם אחת יש מספר זוגי?
   ד. מה ההסתברות שבמספר הזוכה כל המספרים גדולים מ-30?

5) בחפיסת קלפים ישנם 52 קלפים: 13 בצבע שחור בצורת עלה, 13 בצבע אדום בצורת לב, 13 בצבע אדום בצורת יהלום ו-13 בצבע שחור בצורת תלתן.
   מכל צורה (מתוך ה-4) יש 9 קלפים שמספרם 2-10, שאר הקלפים הם; נסיך, מלכה, מלך ואס (בעצם מדובר בקופסת קלפים רגילה ללא ג'וקר).
   שני אנשים משחקים פוקר. כל אחד מקבל באקראי 5 קלפים (ללא החזרה).
   א. מה ההסתברות שעודד יקבל את כל המלכים וערן את כל המלכות?
   ב. מה ההסתברות שאחד השחקנים יקבל את הקלף אס-לב?
   ג. מה ההסתברות שערן יקבל קלפים שחורים בלבד ועודד יקבל שני קלפים שחורים בדיוק?
   ד. מה ההסתברות שערן יקבל לפחות 3 קלפים שהם מספר (אס אינו מספר)?

6) במכללה 4 מסלולי לימוד. בכל מסלול לימוד 5 מזכירות. יש ליצור וועד של 5 מזכירות מתוך כלל המזכירות במכללה. יוצרים וועד באופן אקראי.
חשבו את ההסתברויות הבאות:

א. כל המזכירות בוועד יהיו ממסלול "מדעי ההתנהגות".
ב. כל המזכירות בוועד יהיו מאותו המסלול.
ג. מכל מסלול תבחר לפחות מזכירה אחת.

תשובות סופיות:

1)	א. 53130.	ב. 20475.	ג. 3003.	
2)	א. 252.	ב. 100.	ג. 100.	ד. 60.
3)	א. 0.1117.	ב. 0.1445.	ג. 0.9819.	
4)	א. 0.02.	ב. 0.187.	ג. 0.972.	ד. 0.00246.
5)	א. 0.	ב. 0.1923.	ג. 0.009.	ד. 0.837.
6)	א. $6.45\cdot10^{-5}$.	ב. $2.58\cdot10^{-4}$.	ג. 0.3225.	

סטטיסטיקה א

פרק 9 - קומבינטוריקה - שאלות מסכמות

תוכן העניינים

קומבינטוריקה – שאלות מסכמות:

שאלות:

1) בכיתה 40 תלמידים. מעוניינים לבחור חמישה מהם לוועד כיתה.
בכמה דרכים ניתן להרכיב את הוועד אם:
א. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
ב. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
ג. אין תפקידים שונים בוועד.

2) במשרד 30 עובדים, יש לבחור ארבעה עובדים למשלחת לחו"ל.
בכמה דרכים ניתן להרכיב את המשלחת?
א. במשלחת ארבע משימות שונות שיש למלא וכל עובד יכול למלא יותר ממשימה אחת.
ב. כמו בסעיף א' רק הפעם עובד לא יכול למלא יותר ממשימה אחת.
ג. מעוניינים לבחור ארבעה עובדים שונים למשלחת שבה לכולם אותו התפקיד.

3) מעוניינים להרכיב קוד סודי. הקוד מורכב מ-2 ספרות שונות ו-3 אותיות שונות באנגלית (26 אותיות אפשריות).
א. כמה קודים שונים ניתן להרכיב?
ב. כמה קודים שונים ניתן להרכיב אם הקוד מתחיל בספרה ונגמר בספרה?
ג. כמה קודים ניתן להרכיב אם הספרות חייבות להיות צמודות זו לזו?
ד. בכמה קודים הספרות לא מופיעות ברצף?

4) בארונית 4 מגירות. ילד התבקש על ידי אמו לסדר 6 משחקים בארונית.
הילד מכניס את המשחקים באקראי למגירות השונות.
כל מגירה יכולה להכיל את כל המשחקים יחד.
א. מה ההסתברות שהילד יכניס את כל המשחקים למגירה העליונה?
ב. מה ההסתברות שהילד יכניס את כל המשחקים לאותה מגירה?
ג. מה ההסתברות ש"דומינו" יוכנס למגירה העליונה ויתר המשחקים לשאר המגירות.
ד. מה ההסתברות ש"דומינו" לא יוכנס למגירה העליונה?

5) בעיר מסוימת מתמודדות למועצת העיר 4 מפלגות שונות: "הירוקים", "קדימה", "העבודה" ו"הליכוד". 6 אנשים אינם יודעים למי להצביע, ולכן בוחרים באקראי מפלגה כלשהי.
א. מה ההסתברות שכל ה-6 יבחרו באותה מפלגה?
ב. מה ההסתברות שמפלגת ה"ירוקים" לא תקבל קולות?
ג. מה ההסתברות שמפלגת ה"ירוקים" תקבל בדיוק 3 קולות וכל מפלגה אחרת תקבל קול 1 בלבד?
ד. מה ההסתברות שמפלגת "הירוקים תקבל 2 קולות, מפלגת "העבודה" תקבל 2 קולות ומפלגת "הליכוד" תקבל 2 קולות?

6) 5 חברים נפגשו ורצו לראות סרט. לרשותם ספריה המונה 8 סרטים שונים. כל אחד התבקש לבחור סרט באקראי.
א. מה ההסתברות שכולם יבחרו את אותו הסרט?
ב. מה ההסתברות שכולם יבחרו את "הנוסע השמיני"?
ג. מה ההסתברות שכל אחד יבחר סרט אחר?
ד. מה הסיכוי שלפחות שניים יבחרו את אותו הסרט?
ה. מה ההסתברות שיוסי וערן ייבחרו את "הנוסע השמיני" וכל השאר סרטים אחרים?
ו. מה ההסתברות שהנוסע השמיני לא ייבחר על ידי אף אחד מהחברים?
ז. לקחו את 8 הסרטים ויצרו מהם רשימה. נתון שברשימה 3 סרטי אימה, מה ההסתברות שברשימה שנוצרה יופיעו 3 סרטי האימה ברצף?

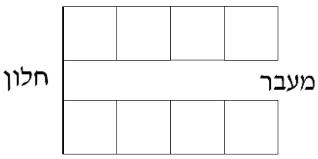
7) בקבוצה 10 אנשים. יש ליצור שתי וועדות שונות מתוך הקבוצה: אחת בת 4 אנשים והשנייה בת 3 אנשים. כל אדם יכול להיבחר רק לוועדה אחת.
חשבו את מס' הדרכים השונות ליצירת הוועדות הללו כאשר:
א. אין בוועדות תפקידים.
ב. בכל וועדה יש תפקיד אחד של אחראי הוועדה.
ג. בכל וועדה כל התפקידים שונים.

8) 4 גברים ו-3 נשים מתיישבים על כסאות בשורה של כסאות תיאטרון. בכל שורה 10 כסאות. בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את ההושבה:
א. ללא הגבלה.
ב. כל הגברים ישבו זה ליד זה וגם כל הנשים תשבנה זו ליד זו.
ג. שני גברים בקצה אחד ושני הגברים האחרים בקצה שני.

9) בהגרלה ישנם 10 מספרים מ-1 עד 10. נבחרו באקראי 5 מספרים. מה ההסתברות שהמספר 7 הוא השני בגודלו מבין המספרים שנבחרו?

10) 6 אנשים עלו לאוטובוס שעוצר ב-10 תחנות.
כל אדם בוחר באופן עצמאי ואקראי באיזו תחנה לרדת.
א. מה ההסתברות שכל אחד יורד בתחנה אחרת?
ב. מה ההסתברות שבדיוק 3 ירדו בתחנה החמישית?
ג. מה ההסתברות שרונית תרד בתחנה השנייה והשאר לא?
ד. מה ההסתברות שכולם ירדו בתחנות 5,6 ולפחות אחד בכל אחת מהתחנות הללו?

11) ברכבת 4 מקומות ישיבה עם כיוון הנסיעה ו4 מקומות ישיבה נגד כיוון הנסיעה.
4 זוגות התיישבו במקומות אלו באקראי.



א. בכמה דרכים שונות ניתן להתיישב?
ב. מה ההסתברות שהזוג כהן ישבו זה לצד זה עם כיוון הנסיעה?
ג. מה ההסתברות שהזוג כהן ישבו זה לצד זה?
ד. מה ההסתברות שהזוג כהן ישבו כל אחד ליד החלון? (בכל שורה יש חלון).
ה. מה ההסתברות שהזוג כהן יישבו כך שכל אחד בכיוון נסיעה מנוגד?
ו. מה ההסתברות שהזוג כהן יישבו אחד מול השני פנים מול פנים.
ז. מה ההסתברות שכל הגברים ייסעו עם כיוון הנסיעה וכל הנשים תשבנה נגד כיוון הנסיעה?
ח. מה ההסתברות שכל זוג ישב אחד מול השני?

12) סיסמא מורכבת מ-5 תווים, תווים אלו יכולים להיות ספרה (0-9) ואותיות ה-ABC (26 אותיות). כל תו יכול לחזור על עצמו יותר מפעם אחת.
א. כמה סיסמאות שונות יש?
ב. כמה סיסמאות שונות יש שבהן כל התווים שונים?
ג. כמה סיסמאות שונות יש שבהן לפחות ספרה אחת ולפחות אות אחת?

13) מתוך קבוצה בת n אנשים רוצים לבחור 3 אנשים לוועדה. בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את הבחירה? בטא את תשובתך באמצעות n.
א. בוועדה אין תפקידים ויש לבחור 3 אנשים שונים לוועדה.
ב. בוועדה תפקידים שונים. וכל אדם לא יכול למלא יותר מתפקיד אחת.
ג. בוועדה תפקידים שונים ואדם יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

14) שני אנשים מטילים כל אחד מטבע n פעמים. בטאו באמצעות n את הסיכוי שלכל אחד מהם אותו מספר פעמים של התוצאה "ראש".

15) יוצרים קוד עם a ספרות (מותר לחזור על אותה ספרה בקוד).
חשבו את ההסתברויות הבאות (בטאו את תשובותיכם באמצעות a):
א. בקוד אין את הספרה 5.
ב. בקוד מופיעה הספרה 3.
ג. בקוד לא מופיעות ספרות אי זוגיות.

תשובות סופיות:

1) א. 102,400,000. ב. 78,960,960. ג. 658008.

2) א. 810,000. ב. 657,720. ג. 27,405.

3) א. 14,040,000. ב. 1,404,000 ג. 5,616,000. ד. 8,424,000.

4) א. 0.00024. ב. 0.00098. ג. 0.05933. ד. 0.75000.

5) א. 0.00098. ב. 0.17798. ג. 0.02929. ד. 0.02197.

6) א. $\frac{1}{4096}$. ב. $\frac{1}{32,768}$. ג. 0.205. ד. 0.795
ה. 0.0105. ו. 0.5129. ז. 0.1071.

7) א. 4,200. ב. 50,400. ג. 604,800.

8) א. 604,800. ב. 2,880 ג. 2,880.

9) 0.238.

10) א. 0.1512. ב. 0.014. ג. 0.059. ד. $\frac{62}{10^6}$.

11) א. 40,320. ב. 0.1071. ג. 0.2142. ד. 0.0357.
ה. 0.5714. ו.0.1429. ז. 0.0143. ח. 0.0095.

12) א. 60,466,176. ב. 45,239,040. ג. 48,484,800.

13) א. $\frac{n!}{3!(n-3)}$. ב. $n\cdot(n-1)(n-2)$. ג. n^3.

14) $\frac{1}{4^n}\cdot\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2$.

15) א. 0.9^a. ב. $1-0.9^a$. ג. 0.5^a.

סטטיסטיקה א

פרק 10 - הסתברות מותנית-במרחב מדגם אחיד

תוכן העניינים

הסתברות מותנית – במרחב מדגם אחיד:

רקע:

לעיתים אנו נדרשים לחשב הסתברות למאורע כלשהו כאשר ברשותנו אינפורמציה לגבי מאורע אחר. הסתברות מותנית הינה סיכוי להתרחשות מאורע כלשהו כאשר ידוע שמאורע אחר התרחש / לא התרחש.

ההסתברות של A בהינתן ש- B כבר קרה: $P\left(A|B\right)$.

כשמרחב המדגם אחיד: $P(A|B)=\frac{|A\cap B|}{|B|}$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נטיל קובייה.

נגדיר:

A - התוצאה זוגית.

B - התוצאה גדולה מ-3.

נרצה לחשב את: $P\left(A|B\right)$.

שאלות:

1) נבחרה ספרה זוגית באקראי. מה הסיכוי שהספרה גדולה מ-6?

2) יוסי הטיל קובייה.
מה הסיכוי שקיבל את התוצאה 4, אם ידוע שהתוצאה שהתקבלה זוגית?

3) הוטלו צמד קוביות. נגדיר:
A - סכום התוצאות בשתי ההטלות הינו 7.
B - מכפלת התוצאות 12.
חשבו את $P(A|B)$.

4) מטבע הוטל פעמיים.
ידוע שהתקבל לכל היותר ראש אחד, מה הסיכוי שהתקבלו שני ראשים?

5) זוג קוביות הוטלו והתקבל שהתוצאות זהות.
מה הסיכוי שלפחות אחת התוצאות 5?

6) זוג קוביות הוטלו והתקבל לפחות פעם אחת 4.
מה הסיכוי שאחת התוצאות 5?

7) נבחרה משפחה בת שני ילדים, שמהם אחד הוא בן.
מה ההסתברות שבמשפחה שני בנים בקרב הילדים?

8) נבחרה משפחה בת שלושה ילדים, ונתון שהילד האמצעי בן.
מה הסיכוי שיש בנות בקרב הילדים?

9) בכיתה 6 בנים ו-7 בנות. נבחרו 4 ילדים מהכיתה.
אם ידוע שנבחרו 2 בנים ו-2 בנות, מה הסיכוי שאלעד לא נבחר?

10) חמישה חברים יצאו לבית קולנוע והתיישבו זה לצד זה באקראי,
בכיסאות מספר 5 עד 9. ידוע שערן ודין התיישבו זה ליד זה.
מה ההסתברות שהם יושבים בכיסאות מספר 6 ו-7?

תשובות סופיות:

1) 0.2.

2) $\frac{1}{3}$.

3) 0.5.

4) 0.

5) $\frac{1}{6}$.

6) $\frac{2}{11}$.

7) $\frac{1}{3}$.

8) $\frac{3}{4}$.

9) $\frac{2}{3}$.

10) $\frac{1}{4}$.

סטטיסטיקה א

פרק 11 - הסתברות מותנית - מרחב לא אחיד

תוכן העניינים

הסתברות מותנית – מרחב לא אחיד:

רקע:

הסיכוי שמאורע A יתרחש, בהינתן שמאורע B כבר קרה: $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

במונה: הסיכוי לחיתוך של שני המאורעות, זה הנשאל וזה הנתון שהתרחש.
במכנה: הסיכוי למאורע נתון שהתרחש.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נבחרו משפחות שיש להם שתי מכוניות. ל-30% מהמשפחות הללו המכונית הישנה יותר היא מתוצרת אירופה ואצל 60% מהמשפחות הללו המכונית החדשה יותר מתוצרת אירופה. כמו כן, בקרב 15% מהמשפחות הללו שתי המכוניות הן מתוצרת אירופאית.
אם המכונית הישנה של המשפחה היא אירופאית, מה ההסתברות
שגם החדשה אירופאית?

שאלות:

1) תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים: מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה.
נגדיר את המאורעות הבאים:
A - לעבור את המבחן בסטטיסטיקה.
B - לעבור את המבחן בכלכלה.
כמו כן נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8, הסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9 והסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75.
חשבו את הסיכויים למאורעות הבאים:

א. התלמיד עבר בסטטיסטיקה, מה ההסתברות שהוא עבר בכלכלה?
ב. התלמיד עבר בכלכלה, מה ההסתברות שהוא עבר בסטטיסטיקה?
ג. התלמיד עבר בכלכלה, מה ההסתברות שהוא נכשל בסטטיסטיקה?
ד. התלמיד נכשל בסטטיסטיקה, מה ההסתברות שהוא נכשל בכלכלה?
ה. התלמיד עבר לפחות מבחן אחד, מה ההסתברות שהוא יעבור את שניהם?

2) במדינה שתי חברות טלפון סלולארי: "סופט" ו"בלי". 30% מהתושבים הבוגרים רשומים אצל חברת "בלי", 60% מהתושבים הבוגרים רשומים אצל חברת "סופט" ול-15% מהתושבים הבוגרים אין טלפון סלולארי כלל.

א. איזה אחוז מהתושבים הבוגרים רשומים אצל שתי החברות?
ב. נבחר אדם שרשום אצל חברת "סופט", מה ההסתברות שהוא רשום גם אצל חברת "בלי"?
ג. אם אדם לא רשום אצל חברת "בלי", מה ההסתברות שהוא כן רשום בחברת "סופט"?
ד. אם אדם רשום אצל חברה אחת בלבד, מה ההסתברות שהוא רשום בחברת "סופט"?

3) במכללה שני חניונים: חניון קטן וחניון גדול. בשעה 08:00 יש סיכוי של 60% שבחניון הגדול יש מקום, סיכוי של 30% שבחניון הקטן יש מקום וסיכוי של 20% שבשני החניונים יש מקום.

א. מה ההסתברות שיש מקום בשעה 08:00 רק בחניון הגדול של המכללה?
ב. ידוע שבחניון הקטן יש מקום בשעה 08:00, מה הסיכוי שבחניון הגדול יש מקום?
ג. אם בשעה 08:00 בחניון הגדול אין מקום, מה ההסתברות שבחניון הקטן יהיה מקום?
ד. נתון שלפחות באחד מהחניונים יש מקום בשעה 08:00, מה ההסתברות שבחניון הגדול יש מקום?

4) נלקחו 200 שכירים ו-100 עצמאים. מתוך השכירים 20 הם אקדמאיים, ומתוך העצמאיים 30 הם אקדמאיים.

א. בנו טבלת שכיחות משותפת לנתונים.

ב. נבחר אדם אקראי מה ההסתברות שהוא שכיר?

ג. מה ההסתברות שהוא שכיר ולא אקדמאי?

ד. מה ההסתברות שהוא שכיר או אקדמאי?

ה. אם האדם שנבחר הוא עצמאי מהי ההסתברות שהוא אקדמאי?

ו. אם האדם שנבחר הוא לא אקדמאי, מה ההסתברות שהוא שכיר?

5) חברה מסוימת פרסמה את הנתונים הבאים לגבי האזרחים מעל גיל 21:
40% מהאנשים מחזיקים כרטיס "ויזה", 52% מחזיקים כרטיס "ישראכרט", 20% מחזיקים כרטיס "אמריקן אקספרס", 15% מחזיקים ויזה וגם ישראכרט, 8% מחזיקים ישראכרט וגם אמריקן אקספרס ו-7% מחזיקים כרטיס ויזה וגם אמריקן אקספרס. כמו כן, 5% מחזיקים בשלושת הכרטיסים הנ"ל.

א. אם לאדם יש ויזה, מה הסיכוי שאין לו ישראכרט?

ב. אם לאדם שני כרטיסי אשראי, מה הסיכוי שאין לו ישראכרט?

ג. אם לאדם לפחות כרטיס אחד, מה הסיכוי שאין לו ישראכרט?

תשובות סופיות:

1) א. 0.833. ב. 0.9375. ג. 0.0625. ד. 0.5. ה. 0.789.

2) א. 5%. ב. 0.0833. ג. 0.786. ד. 0.6875.

3) א. 0.4. ב. $\frac{2}{3}$. ג. 0.25. ד. $\frac{6}{7}$.

4) א. להלן טבלה: ב. $\frac{2}{3}$. ג. 0.6. ד. $\frac{23}{30}$.

	אקדמאי	לא אקדמאי	סה"כ
שכיר	20	180	200
עצמאי	30	70	100
סה"כ	50	250	300

ה. 0.3. ו. 0.72.

5) א. 0.625. ב. 0.133. ג. 0.402.

סטטיסטיקה א

פרק 12 - דיאגרמת עצים - נוסחת בייס ונוסחת ההסתברות השלמה

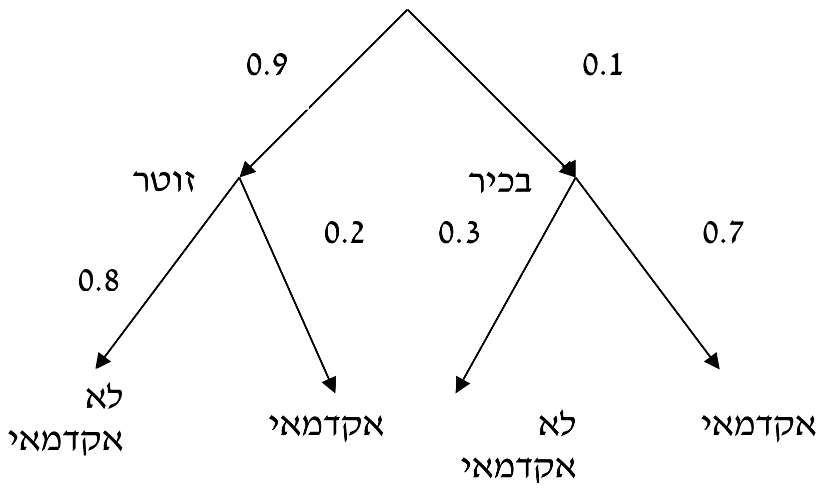
תוכן העניינים

דיאגרמת עצים – נוסחת בייס ונוסחת ההסתברות השלמה:

נשתמש בשיטה זו כאשר יש תרגיל שבו התרחשות המאורעות היא בשלבים, כך שכל תוצאה של כל שלב תלויה בשלב הקודם, פרט לשלב הראשון:

דוגמה:

בחברה מסוימת 10% מוגדרים בכירים והיתר מוגדרים זוטרים. מבין הבכירים 70% הם אקדמאים ומבין הזוטרים 20% הם אקדמאים. נשרטט עץ שיתאר את הנתונים, השלב הראשון של העץ אינו מותנה בכלום ואילו השלב השני מותנה בשלב הראשון.



כדי לקבל את הסיכוי לענף מסוים נכפיל את כל ההסתברויות על אותו ענף.
נבחר אדם באקראי מאותה חברה.

1) מה הסיכוי שהוא בכיר אקדמאי? $0.1 \cdot 0.7 = 0.07$.

2) מה הסיכוי שהוא זוטר לא אקדמאי? $0.9 \cdot 0.8 = 0.72$.

כדי לקבל את הסיכוי לכמה ענפים נחבר את הסיכויים של כל ענף (רק אחרי שבתוך הענף הכפלנו את ההסתברויות).

3) מה הסיכוי שהוא אקדמאי? $0.1 \cdot 0.7 + 0.9 \cdot 0.2 = 0.25$.

4) נבחר אקדמאי מה ההסתברות שהוא עובד זוטר?
מדובר כאן על שאלה בהסתברות מותנה ולכן נשתמש בעיקרון של הסתברות מותנה: $P\left(zutar \mid academay\right) = \frac{0.9 \cdot 0.2}{0.25} = \frac{0.18}{0.25} = 0.72$.

נוסחת ההסתברות השלמה:

בהינתן B, מאורע כלשהו, וחלוקה של מרחב המדגם Ω ל- $A_1,\dots,A_n$ כך ש- $\bigcup_i A_i = \Omega$,

אזי: $P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\cdot P\left(\frac{B}{A_i}\right)$.

נוסחת בייס:

$$P\left(\frac{A_j}{B}\right)=\frac{P(A_j)P\left(\frac{B}{A_j}\right)}{\sum^{n} P(A_i)\cdot P\left(\frac{B}{A_i}\right)}.$$

שאלות:

1) בשקית סוכריות 4 סוכריות תות ו-3 לימון. מוציאים באקראי סוכריה. אם היא בטעם תות אוכלים אותה ומוציאים סוכריה נוספת, ואם היא בטעם לימון מחזירים אותה לשקית ומוציאים סוכריה נוספת.

א. מה ההסתברות שהסוכריה הראשונה שהוצאה בטעם תות והשנייה בטעם לימון?

ב. מה ההסתברות שהסוכריה השנייה בטעם לימון?

2) באוכלוסייה מסוימת 30% הם ילדים, 50% בוגרים והיתר קשישים. לפי נתוני משרד הבריאות הסיכוי שילד יחלה בשפעת במשך החורף הוא 80%, הסיכוי שמבוגר יחלה בשפעת במשך החורף הוא 40% והסיכוי שקשיש יחלה בשפעת במשך החורף הוא 70%.

א. איזה אחוז מהאוכלוסייה הינו קשישים שלא יחלו בשפעת במשך החורף?

ב. מה אחוז האנשים שיחלו בשפעת במשך החורף?

ג. נבחר אדם שחלה במשך החורף בשפעת, מה ההסתברות שהוא קשיש?

ד. נבחר ילד, מה ההסתברות שהוא לא יחלה בשפעת במשך החורף?

3) בכד א' 5 כדורים כחולים ו-5 כדורים אדומים. בכד ב' 6 כדורים כחולים ו-4 כדורים אדומים. בוחרים באקראי כד, מוציאים ממנו כדור ומבלי להחזירו מוציאים כדור נוסף.

א. מה ההסתברות ששני הכדורים שיוצאו יהיו בצבעים שונים?

ב. אם הכדורים שהוצאו הם בצבעים שונים, מה ההסתברות שהכדור השני שהוצא יהיה בצבע אדום?

4) חברת סלולר מסווגת את לקוחותיה לפי 3 קבוצות גיל: נוער, בוגרים ופנסיונרים. נתון כי: 10% מהלקוחות בני נוער, 70% מהלקוחות בוגרים והיתר פנסיונרים. מתוך בני הנוער 90% מחזיקים בסמארט-פון, מתוך האוכלוסייה הבוגרת ל-70% יש סמארט-פון ומתוך אוכלוסיית הפנסיונרים 30% מחזיקים בסמארט-פון.

א. איזה אחוז מלקוחות החברה הם בני נוער עם סמארט-פון?

ב. נבחר לקוח אקראי ונתון שיש לו סמארט-פון. מה ההסתברות שהוא פנסיונר?

ג. אם ללקוח אין סמארט-פון, מה ההסתברות שהוא לא בן נוער?

5) כדי להתקבל למקום עבודה יש לעבור שלושה מבחנים. המבחנים הם בשלבים, כלומר לאחר כישלון במבחן מסוים אין אפשרות לגשת למבחן הבא אחריו.
70% מהמועמדים עוברים את המבחן הראשון. מתוכם, 50% עוברים את המבחן השני. מבין אלה שעוברים את המבחן השני 40% עוברים את המבחן השלישי.
א. מה ההסתברות להתקבל לעבודה?
ב. מועמד לא התקבל לעבודה. מה ההסתברות שהוא נכשל במבחן הראשון?
ג. מועמד לא התקבל לעבודה. מה ההסתברות שהוא עבר את המבחן השני?

6) משרד הבריאות פרסם את הנתונים הבאים:
מתוך אוכלוסיית הילדים והנוער 80% חולים בשפעת בזמן החורף.
מתוך אוכלוסיית המבוגרים (עד גיל 65) 60% חולים בשפעת בזמן החורף.
30% מהתושבים הם ילדים ונוער. 50% הם מבוגרים. היתר קשישים.
כמו כן נתון ש68% מהאוכלוסייה תחלה בשפעת בחורף.
א. מה אחוז החולים בשפעת בקרב האוכלוסייה הקשישה?
ב. נבחר אדם שלא חלה בשפעת, מה ההסתברות שהוא לא קשיש?

7) רדאר שנמצא על החוף צריך לקלוט אנייה הנמצאת ב-1 מ-4 האזורים: A, B, C, D.
אם האנייה נמצאת באזור A הרדאר מזהה אותה בסיכוי 0.8, סיכוי זה פוחת ב-0.1 ככל שהאנייה מתקדמת באזור. כמו כן נתון שבהסתברות חצי האנייה נמצאת באזור D, בהסתברות 0.3 באזור C, באזור B היא נמצאת בסיכוי 0.2, אחרת היא נמצאת באזור A.
א. מה הסיכוי שהאנייה תתגלה ע"י הרדאר?
ב. אם האנייה התגלתה ע"י הרדאר, מה ההסתברות שהיא נמצאת באזור C?
ג. אם האנייה התגלתה ע"י הרדאר, מה הסיכוי שהיא לא נמצאת באזור B?

8) סימפטום X מופיע בהסתברות של 0.4 במחלה A, בהסתברות של 0.6 במחלה B ובהסתברות של 0.5 במחלה C. סימפטום X מופיע אך ורק במחלות הללו, אדם לא יכול לחלות ביותר ממחלה אחת מבין המחלות הללו. לקליניקה מגיעים אנשים כדלקמן: 8% חולים במחלה A, 10% במחלה B, 2% במחלה C והיתר בריאים.
כמו כן נתון שבמחלה A, סימפטום X מתגלה בסיכוי של 80%,
ובמחלות B, C הסימפטום מתגלה בסיכוי של 90% בכל מחלה.
א. מה ההסתברות שאדם הגיע לקליניקה וגילו אצלו את סימפטום X?
ב. אם התגלה אצל אדם סימפטום X, מה ההסתברות שהוא חולה במחלה A?
ג. אם לאדם יש את סימפטום X, מה ההסתברות שהוא חולה במחלה A?
ד. אם לא גילו אצל אדם את סימפטום X, מה ההסתברות שהוא בריא?

9) סטודנט ניגש למבחן אמריקאי. הסיכוי שהוא יודע תשובה לשאלה מסוימת הוא P, ואם הוא לא יודע את התשובה הוא מנחש. בכל מקרה הוא עונה על השאלה. נתון שלשאלה יש k תשובות אפשריות.
אם הסטודנט ענה נכון על השאלה, מה הסיכוי שהוא ידע אותה?

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{2}{7}$. ב. $\frac{23}{49}$.

2) א. 6%. ב. 58%. ג. 0.241. ד. 0.2.

3) א. 0.544. ב. 0.5.

4) א. 9%. ב. 0.09375. ג. 0.9722.

5) א. 0.14. ב. 0.3488 ג. 0.2442.

6) א. 70%. ב. 0.8125.

7) א. 0.57. ב. 0.3158. ג. 0.7543.

8) א. 0.0886 ב. 0.2889. ג. 0.3137. ד. 0.8778.

9) $\frac{kp}{1+p(k-1)}$.

סטטיסטיקה א

פרק 13 - תלות ואי תלות בין מאורעות

תוכן העניינים

תלות ואי תלות בין מאורעות:

רקע:

אם מתקיים ש: $P(B|A)=P(B)$, נגיד שמאורע B בלתי תלוי ב- A.

הדבר גורר גם ההפך: $P(A|B)=P(A)$, כלומר, גם A אינו תלוי ב- B.

כשהמאורעות בלתי תלויים מתקיים ש: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

הוכחה לכך: $P(A/B)=P(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

נשתמש בנוסחאות של מאורעות בלתי תלויים רק אם נאמר במפורש שהמאורעות בלתי תלויים בתרגיל או שמההקשר אפשר להבין ללא צל של ספק שהמאורעות בלתי תלויים.

למשל,

חוקר מבצע שני ניסויים בלתי תלויים הסיכוי להצליח בניסוי הראשון הנו 0.7 והסיכוי להצליח בניסוי השני הוא 0.4.

א. מה הסיכוי להצליח בשני הניסויים יחדו?

כיוון שהמאורעות הללו בלתי תלויים :

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=0.7\cdot 0.4=0.28$$

ב. מה הסיכוי להיכשל בשני הניסויים?

באופן דומה :

$$P(\bar{A}\cap \bar{B})=P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})=(1-0.7)(1-0.4)=0.18$$

הרחבה: אי תלות בין n מאורעות:

n מאורעות $A_1,...,A_n$ הם בלתי תלויים אם ורק אם: $P\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=\prod_{i=1}^{n}P(A_i)$.

שאלות:

1) נתון: $P(A)=0.2$, $P(B)=0.5$, $P(A\cup B)=0.6$.
האם המאורעות הללו בלתי תלויים?

2) תלמיד ניגש לשני מבחנים שהצלחתם לא תלויה זו בזו.
הסיכוי שלו להצליח במבחן הראשון הוא 0.7 והשני 0.4.
א. מה הסיכוי להצליח בשני המבחנים יחדו?
ב. מה הסיכוי שניכשל בשני המבחנים?

3) במדינה מסוימת יש 8% אבטלה, נבחרו באקראי שני אנשים מהמדינה.
א. מה ההסתברות ששניהם מובטלים?
ב. מה ההסתברות שלפחות אחד מהם מובטל?

4) מוצר צריך לעבור בהצלחה ארבע בדיקות בלתי תלויות לפני שיווקו, אחרת הוא נפסל ולא יוצא לשוק. הסיכוי לעבור בהצלחה כל אחת מהבדיקות הוא 0.8. בכל מקרה מבוצעות כל 4 הבדיקות.
א. מה הסיכוי שהמוצר יפסל?
ב. מה ההסתברות שהמוצר יעבור בהצלחה לפחות בדיקה אחת?

5) במדינה מסוימת יש 8% אבטלה, נבחרו באקראי חמישה אנשים מהמדינה.
א. מה ההסתברות שכולם מובטלים במדגם?
ב. מה ההסתברות שלפחות אחד מהם מובטל?

6) עבור שני מאורעות A ו- B המוגדרים על אותו מרחב מדגם נתון ש:
$P(A|B)=0.6$, $P(A\cap\overline{B})=0.3$, $P(A\cup B)=0.9$.
האם A ו- B מאורעות בלתי תלויים?

7) הוכיח שאם: $P(A/B)=P(B/A)$, אז: $P(A)=P(B)$.

8) קבעו אילו מהטענות הבאות נכונות. נמק!

א. אם: $P(A\cup B)=P(A)\cdot P(B)$, אזי המאורעות בלתי תלויים.

ב. מאורע A כלול במאורע B: $0<P(B)<1$, $P(A)>0$, לכן: $P(A/B)<P(A)$.

ג. A ו- B מאורעות זרים שסיכוייהם חיובים לכן הם מאורעות תלויים.

ד. A ו- B מאורעות תלויים שסיכוייהם חיובים לכן A ו- B מאורעות זרים.

ה. $\bar{P}(\bar{A}\cap\bar{B})=1-P(A)-P(B)$ לכן A ו- B מאורעות זרים.

9) זוג מעוניין להביא ילד לעולם, בבדיקה גנטית שהם עשו לאב התגלה שהאב אינו נשא של מחלה Q. מערכים את הסיכוי של האם להיות נשאית למחלץ Q להיות 0.2. אם האם נשאית היא תלד בכל פעם ילד חולה בסיכוי 0.5 באופן בלתי תלוי בין הלידות. האם ילדה שני ילדים. האם המאורעות "הילד הראשון בריא" ו-"הילד השני בריא" הם מאורעות בלתי תלויים?

10) מטילים פעמיים מטבע עם הסתברות p לעץ בכל הטלה, $0<p<1$.

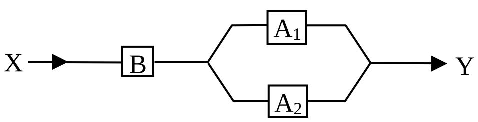
A – יצא עץ בהטלה ראשונה.

B – יצאו תוצאות שונות.

עבור איזה ערכים של p המאורעות A ו- B בלתי תלויים?

11) הוכח אם A ו-B בלתי תלויים, אזי $\bar{A}$, $\bar{B}$ בלתי תלויים.

12) נתונה מערכת חשמלית שבשרטוט, כל מתג יכול להיות פתוח או סגור בהסתברויות שונות, אך באופן בלתי תלוי זה בזה.
להלן ההסתברות של כל מתג להיות סגור:
$P(A_1)=0.7$, $P(A_2)=0.8$, $P(B)=0.9$.



א. מה ההסתברות שיעבור זרם במערכת החשמלית?

ב. אם לא עובר זרם במערכת, מה הסיכוי שמתג B סגור?

13) מטילים שתי קוביות הוגנות. נגדיר שלושה מאורעות:

A – תוצאה של קובייה ראשונה זוגית.

B – תוצאה של קובייה שניה אי זוגית.

C – סכום התוצאות של שתי הקוביות זוגי.

האם המאורעות בלתי-תלויים?

14) ענה על הסעיפים הבאים:

א. המאורעות A ו-B הם מאורעות זרים של ניסוי כלשהו.
חוזרים על אותו ניסוי שוב באופן בלתי תלוי זה בזה.
הוכיחו שהסיכוי שמאורע A יתרחש בניסוי לפני שמאורע B יתרחש בניסוי הוא: $\frac{P(A)}{P(A)+P(B)}$.

ב. מטילים קובייה הוגנת פעם אחרי פעם, מה הסיכוי שתתקבל תוצאה זוגית עוד לפני שתתקבל התוצאה 3?

ג. מטילים קובייה הוגנת פעם אחרי פעם, מה הסיכוי שתתקבל תוצאה זוגית עוד לפני שתקבל תוצאה גדולה מ-4?

תשובות סופיות:

1) כן.

2) א. 0.28. ב. 0.18.

3) א. 0.0064. ב. 0.1536.

4) א. 0.5904. ב. 0.9984.

5) א. 0.08^5. ב. 0.3409.

6) לא, הם תלויים.

7) שאלת הוכחה.

8) א. לא נכון. ב. לא נכון. ג. נכון. ד. לא נכון. ה. נכון.

9) תלויים.

10) 0.5.

11) שאלת הוכחה.

12) א. 0.846. ב. 0.3506.

13) תלויים.

14) א. שאלת הוכחה. ב. $\frac{3}{4}$. ג. $\frac{1}{2}$.

סטטיסטיקה א

פרק 14 - שאלות מסכמות בהסתברות

תוכן העניינים

שאלות מסכמות בהסתברות:

שאלות:

1) נלקחו משפחות שיש להם שתי מכוניות. ל-30% מהמשפחות הללו המכונית הישנה יותר היא מתוצרת אירופה ואצל 60% מהמשפחות הללו המכונית החדשה יותר מתוצרת אירופה. כמו כן 15% מהמשפחות הללו שתי המכוניות הן מתוצרת אירופאית.

א. מה ההסתברות שמשפחה אקראית בת שתי מכוניות תהיה ללא מכוניות מתוצרת אירופה?

ב. מה ההסתברות שלפחות מכונית אחת תהיה אירופאית?

ג. ידוע שלמשפחה יש מכונית אירופאית.
מה ההסתברות שרק המכונית החדשה שלה היא מתוצרת אירופאית?

ד. אם המכונית הישנה של המשפחה היא אירופאית, מה ההסתברות שגם החדשה אירופאית?

2) במדינת "שומקום" 50% מהחלב במרכולים מיוצר במחלבה א', 40% במחלבה ב' והיתר במחלבה ג'. 3% מתוצרת מחלבה א' מגיעה חמוצה למרכולים ואילו במחלבה ב' 10%.
כמו כן ידוע שבמדינת "שומקום" בסך הכול 7.5% מהחלב חמוץ.

א. איזה אחוז מהחלב שמגיע למרכול ממחלבה ג' חמוץ?

ב. אם נרכש חלב חמוץ במרכול. מה הסיכוי שהוא יוצר במחלבה ג'?

ג. ברכישת חלב נמצא שהוא אינו חמוץ. מה הסיכוי שהוא יוצר במחלבה א'?

ד. האם המאורעות: "חלב חמוץ" ו-"יוצר במחלבה א'" בלתי תלויים?

3) רוני ורונה יצאו לבלות במרכז בילוים עם מספר אפשרויות בילוי:
בהסתברות של 0.3 הם ייצאו לבאולינג, בהסתברות של 0.5 הם ייצאו לבית קפה ובהסתברות של 0.7 הם יצאו לפחות לאחד מהם (באולינג/קפה).

א. מה ההסתברות שהם יצאו רק לבאולינג?

ב. האם המאורעות "לצאת לבאולינג" ו-"לצאת לבית קפה" זרים?

ג. האם המאורעות "לצאת לבאולינג" ו-"לצאת לבית קפה" תלויים?

ד. מה ההסתברות שיום אחד הם יצאו רק לבאולינג וביום למחרת לא יצאו לאף אחד מהמקומות?

4) 70% מהנבחנים בסטטיסטיקה עוברים את מועד א'. כל מי שלא עובר את מועד א' ניגש לעשות מועד ב', מתוכם 80% עוברים אותו. מבין אלה שנכשלים בשני המועדים 50% נרשמים לקורס מחדש, והיתר פורשים מהתואר.

א. מה הסיכוי שסטודנט אקראי עבר את הקורס?

ב. אם סטודנט אקראי עבר הקורס, מה הסיכוי שעבר במועד ב'?

ג. מה אחוז הסטודנטים שפורשים מהתואר?

ד. נבחרו 2 סטודנטים אקראיים רונית וינאי, מה ההסתברות שרונית עברה במועד א' ושינאי עבר במועד ב'?

5) באוכלוסייה מסוימת 40% הם גברים והיתר הן נשים. מבין הגברים 10% מובטלים. בסך הכול 13% מהאוכלוסייה מובטלת.

א. מה אחוז האבטלה בקרב הנשים?

ב. נבחר אדם מובטל, מה ההסתברות שזו אישה?

ג. נגדיר את המאורעות הבאים: A - נבחר אדם מובטל, B - נבחר גבר. האם המאורעות הללו זרים? והאם הם בלתי תלויים?

6) בתיבה 10 מטבעות, מתוכם 7 מטבעות רגילים (ראש, זנב) ו-3 מטבעות שבשני צדדיהם טבוע ראש. אדם בוחר באקראי מטבע ומטיל אותו פעמיים.
נסמן ב-A את ההטלה הראשונה ראש, וב-B את ההטלה השנייה ראש.

א. חשבו את הסיכויים למאורעות A ו-B.

ב. האם המאורע A ו-B בלתי תלויים?

ג. ידוע שבהטלה הראשונה התקבל ראש, מה ההסתברות שהמטבע שהוטל הוא מטבע הוגן?

7) ערן מעוניין למכור את רכבו והוא מפרסם מודעה באינטרנט ומודעה בעיתון.
מבין אלה שמעוניינים לרכוש רכב משומש 30% יראו את המודעה באינטרנט, 50% יראו את המודעה בעיתון ו-72% יראו את המודעה בלפחות אחת מהמדיות.

א. מה אחוז האנשים, מאלה שמעוניינים לרכוש רכב משומש, שיראו את 2 המודעות?

ב. אם אדם ראה את המודעה באינטרנט, מה ההסתברות שהוא לא ראה את המודעה בעיתון?

ג. האם המאורעות: "לראות את המודעה באינטרנט" ו-"לראות את המודעה בעיתון" בלתי תלויים?

ד. אדם שראה את המודעה באינטרנט בלבד יתקשר לערן בהסתברות של 0.7, אם הוא ראה את המודעה בעיתון בלבד הוא יתקשר לערן בהסתברות של 0.6 ואם הוא ראה את שתי המודעות הוא יתקשר לערן בהסתברות של 0.9.

i. מה ההסתברות שאדם המעוניין לרכוש רכב משומש יתקשר לערן?

ii. אדם המעוניין לרכוש רכב משומש התקשר לערן. מה ההסתברות שהוא ראה את שתי המודעות?

תשובות סופיות:

1) א. 0.25. ב. 0.75. ג. 0.6. ד. 0.5.

2) א. 0.2. ב.0.267. ג. 0.524. ד. תלויים.

3) א. 0.2. ב. אינם זרים. ג. תלויים. ד. 0.06.

4) א. 0.94. ב. 0.255. ג. 0.03. ד. 0.168.

5) א. 15%. ב. 0.692. ג. לא זרים ותלויים.

6) א. 0.65. ב. תלויים. ג. 0.5384.

7) א. 8%. ב. 0.733. ג. תלויים. ד. i. 0.478.
ד. ii. 0.15.

סטטיסטיקה א

פרק 15 - המשתנה המקרי הבדיד - פונקציית ההסתברות

תוכן העניינים

המשתנה המקרי הבדיד – פונקציית ההסתברות:

רקע:

משתנה מקרי בדיד:

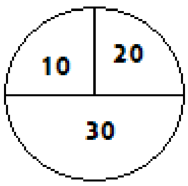
משתנה מקרי בדיד הינו משתנה היכול לקבל כמה ערכים בודדים בהסתברויות שונות.
מתארים את המשתנה המקרי על ידי פונקציית הסתברות.

פונקציית הסתברות:

פונקציה המתאימה לכל ערך אפשרי של המשתנה את ההסתברות שלה.
סכום ההסתברויות על פונקציית ההסתברות חייב להיות 1.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בקזינו יש רולטה כמתואר בשרטוט:



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה בש"ח.
בנו את פונקציית ההסתברות של סכום הזכייה במשחק בודד.

שאלות:

1) ידוע שביישוב מסוים התפלגות מספר המכוניות למשפחה היא:
50 משפחות אינן מחזיקות במכונית.
70 משפחות עם מכונית אחת.
60 משפחות עם 2 מכוניות.
20 משפחות עם 3 מכוניות .
בוחרים באקראי משפחה מהיישוב, נגדיר את X להיות מספר המכוניות של המשפחה שנבחרה. בנו את פונקציית ההסתברות של X.

2) מהאותיות: A , B , C יוצרים קוד דו תווי.
א. כמה קודים ניתן ליצור?
ב. רשמו את כל הקודים האפשריים.
ג. נגדיר את X להיות מספר הפעמים שהאות B מופיעה בקוד.
בנו את פונקציית ההסתברות של X.

3) תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים: מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה. כמו כן, נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8, הסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9 והסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75.
יהי X מספר המבחנים שהסטודנט עבר. בנו את פונקציית ההסתברות של X.

4) הסיכוי לזכות במשחק מסוים הינו 0.3. אדם משחק את המשחק עד אשר הוא מנצח אך בכל מקרה הוא לא משחק את המשחק יותר מ-4 פעמים.
נגדיר את X להיות מספר הפעמים שהוא שיחק את המשחק.
בנו את פונקציית ההסתברות של X.

5) חברה לניהול פרויקטים מנהלת 3 פרויקטים במקביל. הסיכוי שפרויקט א' יצליח הינו 0.7, הסיכוי שפרויקט ב' יצליח הינו 0.8, והסיכוי שפרויקט ג' יצליח הינו 0.9. נתון שהצלחת כל פרויקט בלתי תלויה זו בזו. נגדיר את X להיות מספר הפרויקטים שיצליחו. בנו את פונקציית ההסתברות של X.

6) להלן פונקציית הסתברות של משתנה מקרי כלשהו: $k=1,2...4$, $P(X=k)=\frac{k}{A}$.
מצאו את ערכו של A.

7) בגן ילדים 8 ילדים, מתוכם 5 בנים ו-3 בנות.
בוחרים באקראי 3 ילדים להשתתף בהצגה.
נגדיר את X כמספר הבנים שנבחרו להצגה.
בנו את פונקציית ההסתברות של X.

8) בסקר שנערך בדקו בקרב אנשים האם הם צופים במהדורת החדשות של ערוצים 1,2,10. להלן הנתונים :
20% צופים בערוץ 2.
8% צופים בערוץ 1.
10% צופים בערוץ 10.
כמו כן נתון ש 1% צופים בשלושת המהדורות גם יחד.
10% צופים בשתי המהדורות מתוך השלושה.
נגדיר את X להיות מספר המהדורות מבין 3 המהדורות המדוברות שאדם אקראי צופה. בנו את פונקציות ההסתברות של X.

תשובות סופיות:

1) להלן טבלה:

X	0	1	2	3
$P(X)$	0.25	0.35	0.3	0.1

2) להלן טבלה:

X	0	1	2
$P(X)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

3) להלן טבלה:

X	0	1	2
$P(X)$	0.05	0.20	0.75

4) להלן טבלה:

X	1	2	3	4
$P(X)$	0.3	0.21	0.147	0.343

5) להלן טבלה:

X	0	1	2	3
$P(X)$	0.006	0.092	0.398	0.504

6) 10.

7) להלן טבלה:

X	1	2	3	4
$P(X)$	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$

8) להלן טבלה:

X	1	2	3	4
$P(X)$	0.74	0.15	0.1	0.01

סטטיסטיקה א

פרק 16 - המשתנה המקרי הבדיד - תוחלת - שונות וסטיית תקן

תוכן העניינים

המשתנה המקרי הבדיד – תוחלת, שונות וסטיית תקן:

רקע:

תוחלת:

ממוצע של פונקציית ההסתברות, אם נבצע את התהליך אינסוף פעמים כמה בממוצע נקבל. התוחלת היא צפי של המשתנה המקרי.

מגדירים תוחלת באופן הבא: $E(X)=\sum_i x_i P(x_i)=\mu$.

שונות:

תוחלת ריבועי הסטיות מהתוחלת – נותן אינדיקציה על הפיזור והסיכון של פונקציית ההסתברות.

מגדירים שונות באופן הבא: $V(X)=\sum_i (x_i-\mu)^2 P(x_i)=\sum_i x_i^2 P(x_i)-\mu^2=\sigma^2$.

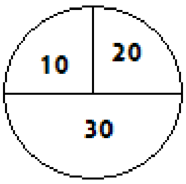
סטיית תקן:

שורש של השונות – הפיזור הממוצע הצפוי סביב התוחלת. מסמנים: $STD=\sigma$.

דוגמה:

בקזינו רולטה כמוראה בשרטוט. אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה ב-₪. הסתברות לקבלת הסכומים השונים:

X	10	20	30
$P(X)$	0.25	0.25	0.5



$$E(X)=10\cdot0.25+20\cdot0.25+30\cdot0.5=22.5=\mu$$

$$V(X)=\sum_i (x_i-\mu)^2 P(x_i)=$$

$$=(10-22.5)^2\cdot0.25+(20-22.5)^2\cdot0.25+(30-22.5)^2\cdot0.5=68.75=\sigma^2$$

כדי לחשב את סטיית התקן נוציא שורש לשונות: $\sigma_x=\sqrt{V(X)}=\sqrt{68.75}=8.29$.

שאלות:

1) אדם משחק במשחק מזל.
נגדיר את X להיות סכום הזכייה.
להלן פונקציית ההסתברות של X :

X	-30	0	20	40
$P(X)$	0.4	0.1	0.3	0.2

מהי התוחלת, השונות וסטית התקן של X?

2) בישוב מסוים שני סניפי בנק : בנק פועלים ובנק לאומי. מתוך האוכלוסייה הבוגרת בישוב, ל-50% חשבון בנק בסניף הפועלים, ל-40% חשבון בנק בסניף לאומי ול-20% מהתושבים הבוגרים אין חשבון באף אחד מהסניפים.
יהי X מסי סניפי הבנק שלבוגר בישוב יש בהם חשבון.
חשבו את : $E(X)$.

3) ידוע של- 20% מהמשפחות יש חיבור לווייני בביתם. בסקר אדם מחפש לראיין משפחה המחוברת ללוויין. הוא מטלפן באקראי למשפחה וממשיך עד אשר הוא מגיע למשפחה המחוברת ללוויין. בכל מקרה הסוקר לא יתקשר ליותר מ-5 משפחות. נגדיר את X להיות מספר המשפחות שאליהן האדם יתקשר.
א. בנו את פונקציית ההסתברות של X.
ב. חשבו את התוחלת וסטיית התקן של X.

4) לאדם צרור מפתחות. בצרור 5 מפתחות אשר רק אחד מתאים לדלת של ביתו. האדם מנסה את המפתחות באופן מקרי. לאחר שניסה מפתח מסוים הוא מוציא אותו מהצרור כדי שלא ישתמש בו שוב.
נסמן ב-X את מספר הניסיונות עד שהדלת תפתח.
א. בנו את פונקציית ההסתברות של X.
ב. חשבו את התוחלת והשונות של X.

5) נתונה פונקציית ההסתברות של המשתנה המקרי X :

X	2	4	6	8
$E(X)$		0.3		0.2

כמו כן נתון ש : $E(X)=4.2$.

א. מצאו את ההסתברויות החסרות בטבלה.

ב. חשבו את : $V(X)$.

6) משתנה מקרי בדיד מקבל את הערכים 0, 5- ו-5.
נתון שהתוחלת של המשתנה 0 ושהשונות היא 10.
מצא את פונקציית ההסתברות.

תשובות סופיות:

1) תוחלת : 2 , שונות : 796.

2) 0.9.

3) א. ראו סרטון. ב. תוחלת : 3.36 , סטיית תקן : 1.603.

4) א. ראו טבלה : ב. תוחלת : 3 , שונות : 2.

X	1	2	3	4	5
$P(X)$	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

5) א. ראו טבלה : ב. 5.16.

X	2	4	6	8
$P(X)$	0.4	0.3	0.1	0.2

6) ראו טבלה :

X	-5	0	5
$P(X)$	0.2	0.6	0.2

סטטיסטיקה א

פרק 17 - המשתנה המקרי הבדיד -תוחלת של פונקציה של משתנה מקרי בדיד

תוכן העניינים

תוחלת של פונקציה של משתנה מקרי בדיד:

רקע:

יהי X משתנה מקרי, ותהי $g(X)$ פונקציה של X. אז:

$$E(g(X)) = g(x_1)P(X = x_1) + g(x_2)P(X = x_2) + g(x_3)P(X = x_3) + \cdots$$
$$= \sum_i g(x_i) \cdot P(x_i)$$

כאשר $x_1, x_2, x_3, \ldots$ הם הערכים שהמשתנה X מקבל.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נתון:

X	0	1	2
$P(X)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

מצאו התפלגות ותוחלת של: $Y = X^2$.

שאלות:

1) מסובבים רולטה עליה המספרים 1 עד 4.
יהיה X המספר שהתקבל לאחר סיבוב הרולטה.
התפלגות X היא כדלהלן:

X	4	3	2	1
$P(X)$	0.3	0.4	0.2	0.1

א. חשבו את: $E(X)$, $E\left(\frac{1}{X}\right)$.

ב. האם: $\frac{1}{E(X)}=E\left(\frac{1}{X}\right)$?

2) יהי X משתנה מקרי בעל פונקציית ההסתברות הבאה:

2	1	0	X
0.75	0.20	0.05	$P(X)$

חשבו את התוחלת של:
א. X^2.
ב. 2^X.

3) להלן פונקציית הסתברות של משתנה מקרי כלשהו: $P(X=k)=\frac{k}{A}$,$k=1,2...4$.

א. מצאו את ערכו של A.

ב. חשבו את: $E\left(\left[X-E(X)\right]^2\right)$.

4) בכל יום משחק ערן משחק יחיד בכל אחת מהאפליקציות הבאות: TWODOTS ו- PIANOTILES. בכל אחד מהמשחקים ישנם שלבים שיש לעבור. משחק בודד מסתיים בהצלחה אם ערן עבר את שלב, ובכישלון אם ערן לא עבר את השלב.
ההסתברות שבאפליקציית TWODOTS ערן יעבור שלב היא 0.6 בכל יום.
ההסתברות שבאפליקציית PIANOTILES ערן יעבור שלב היא 0.35 בכל יום.
נניח שמעבר שלב בכל אחד מהמשחקים בלתי תלוי במשחק אחר.
נסמן ב- W את מספר המשחקים שערן יעבור שלב בהם מחר.

א. חשבו את $E(W)$.

ב. חשבו את $E\left(W^3\right)$.

5) יהי X משתנה מקרי בדיד עם תוחלת ושונות סופיים: $Y = aX + b$, כאשר $a \neq 0$.
a,b הינם פרמטרים. יש להוכיח ש: $E(Y) = aE(X) + b$, $V(Y) = a^2 \cdot V(X)$.

6) אלעד צופה בסדרה בת 6 פרקים. 3 פרקים מתוך ה-6 הם פרקים שצולמו בישראל ו-3 פרקים אחרים צולמו בבולגריה. פרק אחד מבין הפרקים שצולמו בבולגריה מצולם כולו ביער. אלעד צופה בפרקי הסדרה בסדר אקראי, עד אשר הוא מגיע לפרק שצולם ביער בבולגריה. נגדיר את W כמספר הפרקים שצולמו בבולגריה שבהם יצפה אלעד.
א. מהי התפלגות W?
ב. חשבו: $E(W^3)$.

7) למיקה יש 20 חולצות ו-3 מגירות. כאשר מיקה מסדרת את 20 החולצות במגירות היא בוחרת עבור כל חולצה, באופן מקרי ובלתי תלוי בחולצות האחרות, את המגירה אליה תכניס את החולצה (כל אחת מהמגירות יכולה להכיל את כל החולצות).
נסמן ב-X את מספר המגירות המכילות בדיוק 10 חולצות.
מצאו את התפלגות X ואת: $E\left(\sqrt{X+2}\right)$.

8) מטבע מוטל 10 פעמים. X = מספר הפעמים שהתקבלה התוצאה ראש.
א. בנו את פונקציית ההסתברות של X.
ב. הרווח במשחק הוא 4^X. מצאו את התוחלת של הרווח במשחק.
רמז: היעזרו בבינום של ניוטון: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

תשובות סופיות:

1) א. $E\left(\frac{1}{X}\right) = 0.4083$, $E(X) = 2.9$. ב. לא.
2) א. 3.2. ב. 3.45.
3) א. 10. ב. 1.
4) א. 0.95. ב. 2.21.
5) הוכחה.
6) א. $X \sim U(1,3)$. ב. 12.
7) $E\left(\sqrt{X+2}\right) = 1.4659$.
8) א. $X \sim B(10, 0.5)$. ב. 2.5^{10}.

סטטיסטיקה א

פרק 18 - המשתנה המקרי הבדיד- טרנספורמציה לינארית

תוכן העניינים

המשתנה המקרי הבדיד – טרנספורמציה לינארית:

רקע:

טרנספורמציה לינארית היא מצב שבו מבצעים הכפלה של קבוע ו/או הוספה של קבוע על המשתנה המקורי (כולל גם חלוקה של קבוע והחסרה של קבוע).

בניסוח מתמטי נאמר כי אם משתנה אקראי Y מיוצג ע"י משתנה אקראי X כאשר a,b הם קבועים כלשהם: $Y = aX + b$, אזי מתקיימים:

1) $E(Y) = aE(X) + b$.
2) $V(Y) = a^2 \cdot V(X)$.
3) $\sigma_Y = |a|\sigma_x$.

שלבי העבודה:

1) נזהה שמדובר בטרנספורמציה ליניארית (שינוי קבוע לכל התצפיות).
2) נרשום את כלל הטרנספורמציה לפי נתוני השאלה.
3) נפשט את הכלל ונזהה את ערכי a ו- b.
4) נציב בנוסחאות שלעיל בהתאם למדדים שנשאלים.

דוגמה – הרולטה:

בהמשך לנתוני שאלת הרולטה נתון שעלות השתתפות במשחק 15₪.
מהי התוחלת והשונות של הרווח במשחק?

פתרון (בהקלטה):

חישבנו קודם ש: $V(X) = 68.75 = \sigma^2$, $E(X) = 22.5 = \mu$.

שאלות:

1) סטודנט ניגש ל-5 קורסים הסמסטר. נניח שכל קורס שסטודנט מסיים מזכה אותו ב-4 נקודות אקדמאיות. חשבו את התוחלת והשונות של סך הנקודות שיצבור הסטודנט כאשר נתון שתוחלת מספר הקורסים שיסיים היא 3.5 עם שונות 2.

2) תוחלת סכום הזכייה במשחק מזל הינה 10 עם שונות 3. הוחלט להכפיל את סכום הזכייה במשחק. עלות השתתפות במשחק הינה 12.
מה התוחלת ומהי השונות של הרווח במשחק?

3) תוחלת של משתנה מקרי הינה 10 וסטית התקן 5. הוחלט להוסיף 2 למשתנה ולאחר מכן להעלות אותו ב-10%. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן לאחר השינוי?

4) X הינו משתנה מקרי. כמו כן נתון ש-$E(X)=4$ ו-$V(X)=3$.
Y הינו משתנה מקרי חדש, עבורו: $Y=7-X$. חשבו את: $E(Y)$ ו-$V(Y)$.

5) אדם החליט לבטח את רכבו; שווי הרכב 100,000 ₪. להלן התביעות האפשריות והסתברותן: בהסתברות של 0.001 תהיה תביעה טוטאלוסט (כל שווי הרכב).
בהסתברות של 0.02 תהיה תביעה בשווי מחצית משווי הרכב.
בהסתברות של 5% תהיה תביעה בשווי רבע משווי הרכב.
אחרת אין תביעה בכלל. החברה מאפשרת תביעה אחת בשנה.
נסמן ב-X את גובה התביעה השנתית, באלפי ₪.
א. בנו את פונקציית ההסתברות של X.
ב. חשבו את התוחלת והשונות של גובה התביעה.
ג. פרמיית הביטוח היא 4,000 ₪.
מהי התוחלת ומהי השונות של רווח חברת הביטוח לביטוח הרכב הנ"ל?

6) יהי X מספר התשובות הנכונות במבחן בו 10 שאלות.
פונקציית ההסתברות של X נתונה בטבלה הבאה:

X	5	6	7	8	9	10
$P(X)$	0.1	0.2	0.2	0.3		

כמו כן, נתון שצפי מספר התשובות הנכונות בבחינה הוא 7.35.
א. השלימו את פונקציית ההסתברות.
ב. חשבו את השונות מספר התשובות הנכונות בבחינה.
ג. הציון בבחינה מחושב באופן הבא:
כל שאלה נכונה מזכה ב-10 נקודות. לכל שאלה שגויה, מופחתת נקודה.
מהי התוחלת ומה השונות של הציון בבחינה?

7) להלן פונקציית הסתברות של משתנה מקרי כלשהו: $k=1,2...4$, $P(X=k)=\frac{k}{A}$.

א. מצא את ערכו של A.

ב. חשב את התוחלת והשונות של המשתנה הנחקר.

ג. חשב את: $E(X^3)$.

ד. חשב את התוחלת והשונות של המשתנה הבא: $\frac{X}{2}-4$.

תשובות סופיות:

1) תוחלת: 14, שונות: 32.

2) תוחלת: 8, שונות: 12.

3) תוחלת: 13.2, סטיית תקן: 5.5.

4) תוחלת: 3, שונות: 3.

5) א. להלן טבלה: ב. תוחלת: 2350, שונות: $85,727.5^2$.

X	100	50	25	0
$P(X)$	0.001	0.02	0.05	0.929

ג. תוחלת: 1650, שונות: $85,727.5^2$.

6) ב. $V(X)=1.8275$.

7) א. $A=10$. ב. $E(X)=3$, $V(X)=1$. ג. $E(X^3)=35.4$, $V(X^3)=616.84$.

ד. $E(Y)=-2.5$, $V(Y)=0.25$.

סטטיסטיקה א

פרק 19 - תוחלת ושונות של סכום משתנים מקריים

תוכן העניינים

תוחלת ושונות של סכום משתנים מקריים:

רקע:

אם: $X_1, X_2, ..., X_n$ משתנים מקרים אזי:

$E(T) = E(X_1 + X_2 + ... + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_n)$.

אם: $X_1, X_2, ..., X_n$ משתנים מקריים בלתי תלויים בזוגות, אזי:

$V(T) = V(X_1 + X_2 + ... + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + ... + V(X_n)$.

דוגמה:

אדם משחק בשני משחקי מזל בלתי תלויים. תוחלת סכות הזכייה של המשחק הראשון היא 7 עם סטיית תקן 3. תוחלת סכום הזכייה של המשחק השני היא 2- עם סטיית תקן 4.
מה התוחלת ומהי השונות של סכום הזכייה הכולל של שני המשחקים יחד?

שאלות:

1) הרווח ממניה א' הוא עם תוחלת של 5 ושונות 10.
הרווח ממניה ב' הוא עם תוחלת של 4 ושונות.
ידוע שההשקעות של שתי המניות בלתי תלויות זו בזו.
מה התוחלת והשונות של הרווח הכולל מהשקעה בשתי המניות יחד?

2) X ו-Y הם משתנים בלתי תלויים, סטיית התקן של X היא 3.
סטיית התקן של Y היא 4. מהי סטיית התקן של X+Y?

3) אדם משחק בשני משחקי מזל בלתי תלויים זה בזה:
X - סכום הזכייה במשחק הראשון.
Y - סכום הזכייה במשחק השני.
נתון:

$$E(x)=10 \quad , \quad \sigma(X)=3$$
$$E(y)=12 \quad , \quad \sigma(Y)=4$$

מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של סכום הזכייה בשני המשחקים?

4) ברולטה הסיכוי לזכות ב- 30 ₪ הוא חצי, ב-10 ₪ רבע וכך גם ב-20 ₪.
מה היא התוחלת והשונות של סכום הזכייה הכולל לאדם המשחק ברולטה 4 פעמים?

5) נתון משתנה מקרי בעל פונקציית ההסתברות הבאה:

$$P(X=K)=\frac{A}{K-1} \;,\; K=2,3,4,5$$

0 אחר ת

מצאו את ערכו של A.

א. חשבו את התוחלת והשונות של X.

ב. נלקחו n משתנים מקריים בלתי תלויים מההתפלגות הנ"ל.
בטאו באמצעות n את תוחלת והשונות של סכום המשתנים.

תשובות סופיות:

1) תוחלת: 9, שונות: 15.

2) 5.

3) תוחלת: 22, שונות: 5.

4) תוחלת: 90, שונות: 275.

5) א. $A=\frac{12}{25}=0.48$. ב. תוחלת: 2.92, שונות: 1.1136.

ג. תוחלת: 2.92, שונות: $1.1136n$.

סטטיסטיקה א

פרק 20 - התפלגויות בדידות מיוחדות -התפלגות בינומית

תוכן העניינים

התפלגויות בדידות מיוחדות – התפלגות בינומית:

רקע:

נגדיר את המושג ניסוי ברנולי:
ניסוי ברנולי הנו ניסוי שיש לו שתי תוצאות אפשריות: "הצלחה" ו"כישלון".
למשל מוצר פגום או תקין, אדם עובד או מובטל, עץ או פלי בהטלת מטבע וכדומה.
בהתפלגות בינומית חוזרים על אותו ניסוי ברנולי n פעמים באופן בלתי תלוי זה בזה.
מגדירים את X להיות מספר ההצלחות שהתקבלו בסך הכול. נסמן ב- P את הסיכוי להצלחה בניסוי בודד, וב- Q את הסיכוי לכישלון בניסוי בודד.
ואז נגיד ש: $X\sim B(n,p)$.

פונקציית ההסתברות של X:

לכל $k=0,1,2,....,n$ $\quad P(X=K)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

כאשר: $0!=1$; $n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot....\cdot1$; $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

לגודל: $\binom{n}{k}$ ניתן לחשב באמצעות המחשבון.

תוחלת: $E(X)=np$

שונות: $V(X)=npq$

שימו לב, כדי לזהות שמדובר בהתפלגות בינומית צריכים להתקיים כל התנאים הבאים:

1) חוזרים על <u>אותו ניסוי ברנולי</u> באופן <u>בלתי תלוי</u> זה בזה.
2) חוזרים על הניסוי n פעמים.
3) X – מוגדר <u>כמספר ההצלחות המתקבלות</u> בסך הכול.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

במדינה מסוימת ל-80% מהתושבים יש רישיון נהיגה.
נבחרו 10 תושבים אקראיים מהמדינה.

א. מה ההסתברות שבדיוק ל-9 מהם יש רישיון נהיגה?
ב. מה ההסתברות שלפחות ל-9 מהם יש רישיון נהיגה?
ג. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר התושבים שנדגמו ושיש להם רישיון נהיגה?

שאלות:

1) במדינה 10% מהאוכלוסייה מובטלת. נבחרו 5 אנשים באקראי מאותה אוכלוסייה. נגדיר את X להיות מספר המובטלים שהתקבלו במדגם.

א. מהי ההתפלגות של X ?

ב. מה ההסתברות שיהיה בדיוק מובטל אחד?

ג. מה ההסתברות שכולם יעבדו במדגם?

ד. מה ההסתברות ששלושה יעבדו במדגם?

ה. מה ההסתברות שלפחות אחד יהיה מובטל?

ו. מה תוחלת ומהי השונות של מספר המובטלים במדגם?

2) על פי נתוני משרד התקשורת ל-70% מהאוכלוסייה יש סמארטפון. נבחרו 10 אנשים באקראי. נגדיר את X כמספר האנשים שנדגמו עם סמארטפון.

א. מהי ההתפלגות של X ? הסבירו.

ב. מה ההסתברות שבמדגם ל-8 אנשים יש סמארט-פון?

ג. מה ההסתברות שבמדגם לפחות ל-9 יהיו סמארט-פון?

ד. מה התוחלת ומה סטיית התקן של מספר האנשים שנדגמו ולהם סמארט-פון?

3) בבית הימורים יש שורה של 6 מכונות מזל מאותו סוג. משחק במכונת מזל כזו עולה 5 ₪. ההסתברות לזכות ב-20 ₪ בכל אחת מהמכונות היא 0.1 וההסתברות להפסיד את ההשקעה היא 0.9 בכל מכונה. מהמר נכנס לבית ההימורים ומכניס 5 ₪ לכל אחת מ-6 המכונות.

א. מה ההסתברות שיפסיד בכל המכונות?

ב. מה ההסתברות שיזכה בדיוק בשתי מכונות?

ג. מה ההסתברות שיזכה ביותר כסף מה-30 ₪ שהשקיע?

ד. מהן התוחלת וסטיית התקן של הרווח נטו של המהמר (הזכיות בניכוי ההשקעה)?

4) במדינה מסוימת התפלגות ההשכלה בקרב האוכלוסייה מעל גיל 30 היא כזו:

השכלה	נמוכה	תיכונית	תואר I	תואר II ומעלה
פרופורציה	0.1	0.6	0.2	0.1

נבחרו 20 אנשים אקראיים מעל גיל 30.

א. מה ההסתברות ש-5 מהם אקדמאים?

ב. מה התוחלת של מס' בעלי ההשכלה הנמוכה?

5) במכללה מסוימת 20% מהסטודנטים גרים בת״א. מבין הסטודנטים שגרים בת״א 30% מגיעים ברכבם, ומבין הסטודנטים שלא גרים בת״א 50% מגיעים ברכבם למכללה.

א. השומר בשער המכללה בודק לכל סטודנט את תיקו בהיכנסו למכללה. מה ההסתברות שבקרב 5 סטודנטים שנבדקו ע״י השומר רק 1 מתוכם הגיע למכללה ברכבו?

ב. בהמשך לסעיף הקודם מה ההסתברות שרוב הסטודנטים בקרב ה-5 הגיעו למכללה ברכבם?

6) במבחן אמריקאי 20 שאלות. סטודנט ניגש למבחן והסיכוי שהוא יודע שאלה כלשהי הוא 0.8. אם הוא לא יודע הוא מנחש את התשובה.
לכל שאלה 4 תשובות אפשריות שרק אחת מהן נכונה.

א. מה הסיכוי לענות על שאלה מסוימת נכון?

ב. מה הסיכוי שיענה נכונה על בדיוק 16 שאלות?

ג. על כל שאלה שענה נכון התלמיד מקבל 5 נקודות, על כל שאלה ששגה מופחתת נקודה, מה התוחלת ומהי השונות של ציון התלמיד?

7) 5% מקו היצור פגום. המוצרים נארזים בתוך קופסת קרטון. בכל קופסא 10 מוצרים שונים. הקופסאות נארזות בתוך מכולה. בכל מכולה 20 קופסאות.

א. מה ההסתברות שבקופסא אקראית לפחות מוצר פגום אחד?

ב. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר הקופסאות במכולה בהן לפחות מוצר פגום אחד?

8) מטבע הוגן מוטל 5 פעמים. נגדיר את X כמספר הפעמים שהתקבל עץ.
חשבו את: $E\left(X^2\right)$.

תשובות סופיות:

1) א. $X \sim B(n=5, p=0.1)$ ב. 0.32805 ג. 0.59049

ד. 0.0729. ה. 0.40954. ו. תוחלת: 0.5, שונות: 0.45.

2) ב. 0.2335. ג. 0.1493. ד. תוחלת: 7, סטיית תקן: 1.449.

3) א. 0.5314. ב. 0.0984. ג. 0.1143.

ד. תוחלת: 18-, סטיית תקן: 14.697.

4) א. 0.1789. ב. 2.

5) א. 0.1956. ב. 0.4253.

6) א. 0.85. ב. 0.182. ג. תוחלת: 82, שונות: 91.8.

7) א. 0.401. ב. תוחלת: 8.025, סטיית תקן: 2.193.

8) 7.5.

סטטיסטיקה א

פרק 21 - התפלגויות בדידות מיוחדות -התפלגות גיאומטרית

תוכן העניינים

התפלגויות בדידות מיוחדות – התפלגות גיאומטרית:

רקע:

חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי.
X – מוגדר להיות מספר הניסויים שבוצעו עד ההצלחה הראשונה, כולל.
נסמן ב- p את הסיכוי להצלחה בניסויי בודד וב- q את הסיכוי לכישלון בניסוי בודד.
$X \sim G(p)$.

פונקציית ההסתברות: $P(X=k)=pq^{k-1}$, $k=1,2,\ldots\infty$.

תוחלת: $E(X)=\frac{1}{p}$.

שונות: $V(X)=\frac{q}{p^2}$.

תכונות חשובות:

אם X מתפלג על פי התפלגות גיאומטרית, אזי X הוא בעל תכונת חוסר זיכרון,
דהיינו, $P(X=(n+k)/X>k)=P(X=n)$ · $P(X>k)=q^k$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בכד 10 כדורים ש-3 מהם ירוקים. אדם מוציא באקראי כדור אחר כדור עד שבידו כדור ירוק. ההוצאה היא עם החזרת הכדור לכד בכל פעם מחדש.

א. מהי ההתפלגות של מספר הכדורים שהוצאו?
ב. מה ההסתברות שהוצאו בדיוק 5 כדורים?
ג. מה ההסתברות שהוצאו יותר מ 5 כדורים?
ד. אם הוצאו יותר מ-3 כדורים . מה הסיכוי שהוצאו בדיוק 5 כדורים?
ה. מה התוחלת וסטיית התקן של מספר הכדורים שהוצאו?

שאלות:

1) קו ייצור המוני מייצר מוצרים כך ש-5% מהם פגומים. איש בקרת איכות דוגם באופן מקרי מוצרים מקו הייצור עד אשר בידו מוצר פגום.
חשבו את ההסתברויות הבאות:

א. שידגום 3 מוצרים.

ב. שידגום 4 מוצרים.

ג. שידגום 5 מוצרים.

ד. שידגום יותר מ-7 מוצרים.

ה. שידגום לא פחות מ-8 מוצרים.

2) צילום שמבוצע במכון הרנטגן "X-RAY" יתקבל תקין בהסתברות של 0.9. אדם נכנס למכון כדי להצטלם, והוא ייצא מהמכון רק כאשר יש בידו תצלום תקין.

א. מה ההסתברות שיצטלם בסך הכול 3 פעמים?

ב. מה ההסתברות שהצטלם יותר מ-4 פעמים?

ג. מה התוחלת ומה השונות של מספר הצילומים שייבצעו?

ד. כל צילום עולה למכון 50 ₪. אדם משלם על צילום תקין 100 ₪.
מה התוחלת ומה השונות של רווח המכון מאדם שהגיע להצטלם?

3) מטילים מטבע עד אשר מתקבלת התוצאה "עץ".

א. מה ההסתברות להטיל את המטבע לכל היותר 10 פעמים?

ב. מה ההסתברות להטיל את המטבע לכל היותר 5 פעמים, אם ידוע שהמטבע הוטל לפחות 3 פעמים?

ג. אם ידוע שבשתי ההטלות הראשונות התקבלה התוצאה "פלי", מה ההסתברות שהאדם הטיל את המטבע 7 פעמים?

ד. מה תוחלת מספר הפעמים שהתקבלה התוצאה "פלי"?

4) 30% מהמכוניות בארץ הן בצבע לבן. בכל יום נכנסות לחניון כשלהו 10 מכוניות אקראיות.

א. מה ההסתברות שביום מסוים בדיוק מחצית מהמכוניות בחניון יהיו לבנות?

ב. מה תוחלת מספר הימים שיעברו מהיום עד שלראשונה מחצית מהמכוניות בחניון יהיו לבנות?

5) אדם משחק במשחק מזל עד אשר הוא מפסיד. הצפי הוא שישחק את המשחק 10 פעמים. מה הסיכוי להפסיד במשחק בודד?
   א. מה ההסתברות שישחק את המשחק בדיוק 6 פעמים?
   ב. מה ההסתברות שישחק את המשחק לכל היותר 12 פעמים?
   ג. ידוע שהאדם שיחק את המשחק יותר מ-6 פעמים.
   מה ההסתברות ששיחק את המשחק בדיוק 10 פעמים?
   ד. מהי סטיית התקן של מספר הפעמים שישחק את המשחק?

6) במאפייה מייצרים עוגות גבינה ועוגות שוקולד שנארזות באריזות אטומות. 40% מהעוגות הן עוגות גבינה והיתר שוקולד. התווית על האריזה מודבקת בשלב מאוחר יותר של הייצור. אדם נכנס למפעל ובוחר באקראי עוגה.
   א. מה ההסתברות שייאלץ לבחור 5 עוגות עד שקיבל עוגות שוקולד?
   ב. אם הוא דגם פחות מ-7 עוגות עד שיקבל עוגת שוקולד, מה ההסתברות שבפועל הוא דגם יותר מ-4 עוגות?
   ג. האדם דוגם עוגות עד אשר הוא מוצא עוגת שוקולד. ידוע שעוגת גבינה עולה ליצרן 50 שקלים ועוגת שוקולד 30 שקלים. מהי התוחלת ומהי השונות של עלות הייצור הכוללת של העוגות שדגם?
   ד. בהמשך לסעיף הקודם, מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר עוגת הגבינה שדגם האדם?

תשובות סופיות:

1) א. 0.04512. ב. 0.0428. ג. 0.0407. ד. 0.6983. ה. 0.6983.

2) א. 0.009. ב. 0.0001. ג. תוחלת: 1.111, שונות: 0.1234.
   ד. תוחלת: 44.4, שונות: 308.5.

3) א. 0.999. ב. 0.875. ג. 0.03125. ד. 1.

4) א. 0.1029. ב. 9.72.

5) א. 0.06. ב. 0.7176. ג. 0.0729. ד. 9.487.

6) א. 0.015. ב. 0.0215. ג. תוחלת: $63\frac{1}{3}$, שונות: $2777\frac{7}{9}$.
   ד. תוחלת $\frac{2}{3}$, שונות 1.054.

סטטיסטיקה א

פרק 22 - התפלגויות בדידות מיוחדות -התפלגות אחידה

תוכן העניינים

התפלגויות בדידות מיוחדות – התפלגות אחידה:

רקע:

התפלגות אחידה הינה התפלגות שבה לכל תוצאה יש את אותה הסתברות.
הערכים המתקבלים בהתפלגות הם החל מ- a ועד b בקפיצות של אחד.
$X \sim U(a,b)$.

פונקציית ההסתברות: $P(X=K)=\frac{1}{b-a+1}$, $K = a,a+1,..,b$.

תוחלת: $E(X)=\frac{a+b}{2}$.

שונות: $V(X)=\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$.

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

אדם בוחר מספר אקראי בין 1 ל-100 כולל.
מהי פונקציית ההסתברות של המספר ומה הצפי שלו?

שאלות:

1) במשחק הלוטו 45 כדורים ממוספרים מ-1 ועד 45.
נתבונן במשתנה X - המספר של הכדור הראשון שנשלף על ידי המכונה.
א. חשבו את $P(X=2)$.
ב. חשבו את $P(X\le 30)$.
ג. חשבו את $P(X>4 \mid X\le 10)$.
ד. חשבו את $P(X=k)$.

2) קוסם מבקש לבחור מספר שלם אקראי בין 1 ל-100.
א. בהנחה שאין כאן מניפולציות של הקוסם, מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של המספר שיבחר?
ב. הקוסם ביקש משישה אנשים לבחור מספר:
i. מה ההסתברות ששלושה מהם יבחרו מספר הגדול מ-80?
ii. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של סכום המספרים שהאנשים בחרו?

3) יהי X התוצאה בהטלת קובייה.
א. מהי ההתפלגות של X?
ב. מה התוחלת של X?
ג. קובייה הוטלה 4 פעמים. מה התוחלת ומה השונות של סכום התוצאות ב-4 ההטלות?

4) בכד 10 כדורים שרק אחד בצבע אדום. כדורים הוצאו ללא החזרה עד שהתקבל הכדור האדום. מה התוחלת ומהי השונות של מספר הכדורים שהוצאו?

5) יש לבחור מספר אקראי בין 1 ל-50, כולל.
א. מה הסיכוי שהמספר 4 יבחר?
ב. מה הסיכוי שהמספר שיבחר גדול מ-20?
ג. אם נבחר מספר גדול מ-20, מה ההסתברות שהוא קטן מ-28?

6) הוכיחו שאם: $X\sim U(a,b)$, אז מתקיים ש: $E(X)=\frac{a+b}{2}$.

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{1}{45}$. ב. $\frac{30}{45}$. ג. 0.6.

2) א. תוחלת: 50.5, סטיית תקן: 28.87.
ב. i. 0.08192. ב. ii. תוחלת: 303, סטיית תקן: 70.71.

3) א. $X \sim U(1,6)$. ב. 3.5. ג. תוחלת: 14, שונות: 11.66.

4) תוחלת: 5.5, שונות: 8.25.

5) א. $\frac{1}{50}$. ב. $\frac{30}{50}$. ג. $\frac{7}{30}$.

6) שאלת הוכחה.

סטטיסטיקה א

פרק 23 - התפלגויות בדידות מיוחדות- התפלגות פואסונית

תוכן העניינים

התפלגויות בדידות מיוחדות – התפלגות פואסונית:

רקע:

התפלגות פואסונית היא התפלגות שמאפיינת את מספר האירועים שמתרחשים ביחידת זמן.

λ - פרמטר המאפיין את ההתפלגות הנ"ל. הפרמטר מייצג את קצב האירועים ביחידת זמן. כלומר, כמה אירועים בממוצע קורים ביחידת זמן: $X \sim pois(\lambda)$.

התפלגות פואסונית חייבת להופיע כנתון בשאלה ולכן לא יהיה צורך לזהותה.

פונקציית ההסתברות של ההתפלגות הפואסונית נתונה:

$$K = 0,1,2,\ldots\infty \quad , \quad P(X=K)=\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{K}}{K!}.$$

התוחלת והשונות של ההתפלגות:

$$E(X)=V(X)=\lambda.$$

תכונות מיוחדות של ההתפלגות:

- בהתפלגות הזו הפרמטר λ פרופורציונלי לאינטרוול הזמן שעליו דנים.
- אינטרוולי זמן לא חופפים בלתי תלויים זה בזה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

במוקד טלפוני מתקבלות פניות בקצב של 5 פניות לדקה.
מספר הפניות בדקה מתפלג פואסונית.

א. מה ההסתברות שבדקה כלשהי תתקבל פניה 1?
ב. מה ההסתברות שבשתי דקות יגיעו 12 פניות?
ג. מה ההסתברות שבדקה אחת תגיע פניה 1 ובשתי דקות שלאחר מכן 12 פניות?
ד. מה התוחלת וסטיית התקן של מספר הפניות בדקה?

שאלות:

1) במוקד טלפוני מתקבלות פניות בקצב של 5 פניות לדקה.
מספר הפניות בדקה מתפלג פואסונית.

א. מה ההסתברות שבדקה תתקבל פניה 1?

ב. מה ההסתברות שבדקה תתקבל לפחות פניה 1?

ג. מה ההסתברות שבדקה יתקבלו לכל היותר 2 פניות?

ד. מה שונות מספר הפניות בדקה?

2) מספר הטעויות לעמוד בעיתון מתפלג פואסונית עם ממוצע של 4 טעויות לעמוד.
בחלק מסוים של עיתון ישנם 5 עמודים.

א. מה ההסתברות שבחלק זה ישנן בדיוק 18 טעויות?

ב. אם בעמוד הראשון אין טעויות, מה ההסתברות שבסך הכול בכול החלק ישנן 15 טעויות?

ג. אם בחלק של העיתון נמצאו בסך הכול 18 טעויות, מה ההסתברות ש-5 מהן בעמוד הראשון?

3) מספר תאונות הדרכים הקטלניות במדינת ישראל מתפלג פואסונית עם סטיית תקן של 2 תאונות לשבוע.

א. מה תוחלת מספר התאונות בשבוע?

ב. מהי ההסתברות שבחודש (הניחו שבחודש יש 4 שבועות) יהיה בדיוק שבוע אחד בו יהיו 3 תאונות דרכים קטלניות?

4) לחנות AM:PM השכונתית מספר הלקוחות שנכנסים מתפלג פואסונית עם ממוצע של 2 לקוחות לדקה.

א. מה ההסתברות שבדקה כלשהי יהיו בדיוק 3 לקוחות?

ב. מה ההסתברות שבדקה כלשהי יגיח לפחות לקוח אחד?

ג. מה ההסתברות שבדקה כלשהי יהיו לכל היותר שני לקוחות?

ד. מהי התוחלת ומה סטיית התקן של מספר הלקוחות שנכנסים לחנות בדקה?

5) מספר הלידות בבית חולים מתפלג פואסונית עם תוחלת של 8 לידות ביום.

א. מה ההסתברות שביום א' נולדו 10 תינוקות וביום ב' נולדו 7 תינוקות?

ב. מיילדת עובדת במשמרות של 8 שעות. מה ההסתברות שבמשמרת שלה נולדו 3 תינוקות?

ג. מהי התוחלת של מספר הימים בשבוע בהם נולדים ביום עשרה תינוקות?

6) במערכת אינטרנט לתשלום חשבונות, מספר החשבונות המשולמים בשעה מתפלג פואסונית עם תוחלת של 30.

א. כמה שעות צפויות לעבור עד אשר תתקבל שעה עם בדיוק 33 חשבונות?

ב. בין השעה 08:00 ל-08:20 היו 18 חשבונות, מה ההסתברות שבין 08:00 ל-08:10 היו בדיוק 6 חשבונות?

תשובות סופיות:

1) א. 0.0337. ב. 0.9933. ג. 0.1246. ד. 5.

2) א. 0.084. ב. 0.099. ג. 0.151.

3) א. 4. ב. 0.407.

4) א. 0.1804. ב. 0.8647. ג. 0.6767. ד. תוחלת: 2, סטיית תקן: 1.41.

5) א. 0.0139. ב. 0.2196. ג. 0.6948.

6) א. 16.7. ב. 0.0708.

סטטיסטיקה א

פרק 24 - התפלגויות בדידות מיוחדות-התפלגות היפרגאומטרית

תוכן העניינים

התפלגויות בדידות מיוחדות – התפלגות היפרגאומטרית:

רקע:

נתונה אוכלוסייה המכילה N פריטים , מתוכה D פריטים בעלי תכונה מסוימת – פריטים אלה נקראים "מיוחדים". בוחרים מאותה אוכלוסייה n פריטים ללא החזרה.
X מוגדר להיות מספר הפריטים ה"המיוחדים" שנדגמו.
משתנה מקרי היפרגאומטרי עם הפרמטרים (N,D,n) יסומן על ידי: $X \sim H(N,D,n)$.

פונקציית ההסתברות של ההתפלגות: $P(X=k)=\frac{\binom{D}{k}\binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.

התוחלת של ההתפלגות: $E(X)=n\cdot\frac{D}{N}$.

השונות של ההתפלגות: $V(X)=n\cdot\frac{D}{N}\cdot\left(1-\frac{D}{N}\right)\cdot\frac{N-n}{N-1}$.

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

בכתה 40 תלמידים, שמתוכם 10 בנות והשאר בנים. בוחרים קבוצה של ארבעה תלמידים שיסעו למשלחת.

א. כיצד מספר הבנים במשלחת מתפלג?
ב. מה התוחלת ומהי השונות של מספר הבנים במשלחת?
ג. מה הסיכוי שבמשלחת יהיו 3 בנים?

שאלות:

1) בכד 5 כדורים אדומים ו-4 כדורים ירוקים. מוציאים באקראי שלושה כדורים מהכד.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של מספר הכדורים האדומים שהוצא בטבלה.

ב. חשבו את התוחלת והשונות של מספר הכדורים האדומים שהוצאו, פעם מתוך פונקציית ההסתברות ופעם מתוך הנוסחאות להתפלגות היפרגאומטרית.

ג. מה הייתה התוחלת והשונות של מספר הכדורים האדומים אם ההוצאה הייתה עם החזרה?

2) בחידון 10 שאלות משלושה תחומים שונים: 3 בתחום הספורט, 4 בתחום הבידור והיתר בתחום המדעים. משתתף בחידון שולף באקראי 4 שאלות.

נגדיר את X להיות מספר השאלות מתחום הספורט שנשלפו.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של X בנוסחה (לא בטבלה).

ב. מה התוחלת וסטיית התקן של X?

ג. חשבו את ההסתברות הבאה: $P\left(X=2 \mid X>1\right)$.

3) נדגמו 6 אנשים מתוך אוכלוסייה שבה 60% בעלי רישיון נהיגה. אנו מתעניינים במספר האנשים שנדגמו עם רישיון נהיגה. זהו בסעיפים הבאים את ההתפלגות, וחשבו לכל התפלגות את התוחלת והשונות:

א. האוכלוסייה גדולה מאד.

ב. האוכלוסייה בת 10 אנשים.

4) בארגון עובדים 7 מהנדסים, 3 טכנאים ו-5 הנדסאים. בוחרים באופן מקרי משלחת של 4 עובדים לכנס במדריד.

א. מהי ההסתברות שייבחרו רק מהנדסים?

ב. מה תוחלת מספר הטכנאים שייבחרו?

תשובות סופיות:

1) א.

x	0	1	2	3
$P(x)$	$\frac{4}{84}$	$\frac{30}{84}$	$\frac{40}{84}$	$\frac{10}{84}$

ב. תוחלת: $1\frac{2}{3}$, שונות: $\frac{5}{9}$.

ג. תוחלת: $1\frac{2}{3}$, שונות: $\frac{20}{27}$.

2) א. $\dfrac{\binom{3}{k}\cdot\binom{7}{4-k}}{\binom{10}{4}}$. ב. תוחלת: 1.5, סטיית תקן: 0.748. ג. 0.9.

3) א. תוחלת: 3.6, שונות: 1.44. ב. תוחלת: 3.6, שונות: 0.64.

4) א. 0.0256. ב. 0.8.

סטטיסטיקה א

פרק 25 - התפלגויות בדידות מיוחדות -התפלגות בינומית שלילית

תוכן העניינים

התפלגויות בדידות מיוחדות – התפלגות בינומית שלילית:

רקע:

בהתפלגות זו חוזרים על אותו ניסוי ברנולי בזה אחר זה באופן בלתי תלוי עד אשר מצליחים בפעם ה- r. X = מספר החזרות עד שהתקבלו r הצלחות: $X \sim NB(r,p)$.

פונקציית ההסתברות: $k = r, r+1, \dots \infty$, $P(X=k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$.

תוחלת: $E(X) = \frac{r}{p}$.

שונות: $V(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

קובייה מוטלת עד שמקבלים 3 פעמים תוצאה שגדולה מ-4.

א. מה הסיכוי להטיל את הקובייה 6 פעמים?

ב. מה תוחלת ושונות מספר הפעמים שנטיל את הקובייה?

שאלות:

1) בכד 4 כדורים שחורים ו-6 כדורים לבנים. כדור מוצא באקראי פעם אחר פעם ומוחזר בין הוצאה להוצאה. נסמן ב- X את מספר הכדורים שהוצאו עד שהתקבלו 2 כדורים לבנים בסך הכול (לא בהכרח ברצף).
   א. חשבו את $P\left(X=2\right)$.
   ב. חשבו את $P\left(X=3\right)$.
   ג. חשבו את $P\left(X=4\right)$.
   ד. חשבו את $P\left(X=k\right)$.

2) הסיכוי לזכות במשחק מזל הוא 0.4. אדם משחק במשחק ומפסיק ברגע שהוא ניצח פעמיים (לא בהכרח ברצף).
   א. מה הסיכוי שישחק פעמיים?
   ב. מה הסיכוי שישחק 3 פעמים?
   ג. מה הסיכוי שישחק 4 פעמים?
   ד. מה הסיכוי שישחק 5 פעמים?
   ה. מה הסיכוי שישחק k פעמים?

3) הראו שההתפלגות הגאומטרית היא מקרה פרטי של ההתפלגות הבינומית השלילית.

4) מטבע מוטל שוב ושוב עד שמתקבל שלוש פעמים עץ בסך הכול.
   א. בנו את פונקציית ההסתברות של מספר ההטלות הכולל.
   ב. מהי התוחלת ומהי השונות של מספר ההטלות הכולל?
   ג. חוזרים על התהליך שלעיל 5 פעמים. מה ההסתברות שפעמיים מתוך ה-5 חזרות נאלץ להטיל את המטבע בדיוק 4 פעמים?

5) יהיה X_i מספר החזרות עד ההצלחה הראשונה בניסיונות ברנוליים בלתי תלויים זה בזה, כאשר $i=1,2,\dots,n$.

הוכיחו שהתוחלת והשונות של $\sum_{i=1}^{n} X_i$ זהות לתוחלת והשונות של ההתפלגות הבינומית השלילית $NB\left(n,p\right)$.

תשובות סופיות:

1) א. 0.36. ב. 0.288. ג. 0.0576. ד. $0.6^2 \cdot 0.4^{k-2}$.

2) א. 0.16. ב. 0.192. ג. 0.1728. ד. 0.13824. ה. $0.4^2 \cdot 0.6^{k-2}$.

3) שאלת הוכחה.

4) ב. תוחלת: 6, שונות: 6. ג. 0.1886.

5) שאלת הוכחה.

סטטיסטיקה א

פרק 26 - המשתנה המקרי הבדיד - שאלות מסכמות

תוכן העניינים

המשתנה המקרי הבדיד – שאלות מסכמות:

שאלות:

1) נתון כי: $Y \sim B\left(10, \frac{1}{4}\right)$, $X \sim B\left(4, \frac{1}{2}\right)$.

א. חשבו את התוחלת וסטיית התקן של X .

ב. $W = 2X - 4$, חשבו את התוחלת וסטיית התקן של W.

ג. $T = X + Y$, חשבו את התוחלת של T.
האם ניתן לדעת מה סטיית התקן של T?

2) ערן משחק בקזינו בשתי מכונות הימורים, בכל מכונה משחק אחד (במכונה א' ובמכונה ב'). הסיכוי שלו לנצח במשחק במכונה א' הינו 0.08 והסיכוי שלו לנצח רק במכונה א' הינו 0.05. הסיכוי שלו להפסיד בשני המשחקים ביום מסוים הוא 0.88.

א. מה הסיכוי שערן ניצח בשני המשחקים?

ב. מה התוחלת ומהי השונות של מספר הניצחונות של ערן?

ג. אם ערן נכנס לקזינו 5 פעמים ובכל פעם שיחק את שני המשחקים, מה ההסתברות שערן ינצח בשני המשחקים בדיוק פעם אחת מתוך חמשת הפעמים?

3) לאדם צרור מפתחות. בצרור 5 מפתחות אשר רק אחד מתאים לדלת של ביתו. האדם מנסה את המפתחות באופן מקרי. לאחר שניסה מפתח מסוים הוא מוציא אותו מהצרור כדי לא להשתמש בו שוב.
נסמן ב-X את מספר הניסיונות עד שהדלת תפתח.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של X.

ב. חשבו את התוחלת והשונות של X.

ג. כל ניסיון לפתוח הדלת אורך חצי דקה. מה התוחלת ומה השונות של הזמן הכולל לפתיחת הדלת?

4) מספר התקלות בשידור "ערוץ 1" מתפלג פואסונית בקצב של 6 תקלות ביום.

א. מה ההסתברות שביום מסוים הייתה לפחות תקלה אחת?

ב. מה ההסתברות שבשבוע (7 ימי שידור) יהיו בדיוק 6 ימים בהם לפחות תקלה אחת?

ג. מה תוחלת מספר הימים שיעברו מהיום ועד היום הראשון בו לפחות תהיה תקלה אחת?

5) בעל חנות גדולה בקניון שם לב ש-40% מהמוצרים בחנותו נרכשים עבור ילדים, 35% נרכשים עבור נשים ו-25% נרכשים עבור גברים. 10% מהמוצרים הנרכשים עבור ילדים הם מתוצרת חוץ, וכך גם 60% מהמוצרים הנרכשים עבור נשים ו-50% מאלה הנרכשים עבור גברים.

א. מה ההסתברות למכור בחנות זו מוצר מתוצרת חוץ?

ב. יהי X מספר המוצרים שימכרו בחנות זו מפתיחתה ביום א' בבוקר, עד שלראשונה יימכר מוצר מתוצרת הארץ (כולל).
מהי פונקציית ההסתברות של X?

ג. מהי תוחלת מס' המוצרים מתוצרת חוץ שימכרו, עד שלראשונה יימכר מוצר מתוצרת הארץ?

ד. ביום ב' נמכרו בחנות 7 מוצרים. מה ההסתברות שבדיוק 3 מהם הם מתוצרת חוץ?

6) חברת הפקות של סרטים הפיקה 3 סרטים, אשר הופקו לטלוויזיה המקומית.
חברת ההפקות מנסה למכור את הסרטים הללו לחו"ל.
להלן ההסתברויות למכירת הסרטים לחו"ל:
הסרט "הצבי" יימכר לחו"ל בסיכוי של 0.6.
הסרט "לעולם לא" יימכר לחו"ל בסיכויי של 0.7.
הסרט "מוות פתאומי" יימכר לחו"ל בסיכוי של 0.2.
ידוע כי כל סרט עלה להפקה חצי מיליון שקלים. כמו כן, כל סרט הביא להכנסה של 200,000 שקלים מהטלוויזיה המקומית. במידה וסרט יימכר לחו"ל, כל סרט יימכר ב-600,000 שקלים.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של מספר הסרטים שיימכרו לחו"ל.

ב. מהי התוחלת והשונות של מספר הסרטים שיימכרו?

ג. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של הרווח (במאות אלפי שקלים) של חברת ההפקה?

7) במפעל מייצרים סוכריות כך ש-20% מהסוכריות בטעם תות. הייצור הוא ייצור המוני. שאר הסוכריות בטעמים שונים, השקיות נארזות ובכל שקית בדיוק 5 סוכריות.

א. נבחרה שקית ונתון שבשקית פחות מ-3 סוכריות אדומות.
מה ההסתברות שבשקית סוכריה אדומה אחת?

ב. בוחרים באקראי שקית אחר שקית, במטרה למצוא שקית ללא סוכריות אדומות. מה ההסתברות שייאלצו לדגום יותר מ-6 שקיות?

8) מבחן בנוי משני חלקים: בחלק א' 10 שאלות ובחלק ב' 10 שאלות. תלמיד התכונן רק לחלק א' של המבחן ובחלק זה בכל שאלה יש סיכוי של 0.8 שיענה נכון, בחלק השני לכל שאלה יש 4 תשובות כשרק אחת נכונה. בחלק זה הוא מנחש את התשובות.

א. מהי ההסתברות שבחלק הראשון הוא יענה נכון על 7 שאלות בדיוק?

ב. מהי ההסתברות שבחלק השני הוא יענה נכון על פחות מ-3 שאלות?

ג. מה התוחלת ומהי השונות של מספר התשובות הנכונות בחלק הראשון?

ד. מהי התוחלת ומהי השונות של מספר התשובות הנכונות בבחינה כולה?

9) יהי X משתנה מקרי המקיים: $E(X)=2$ וכן: $V(X)=1$.

חשבו: $E(X-5)^2$.

10) הסיכוי לעבור מבחן נהיגה הינו P. בוחרים באקראי ארבעה נבחנים.

ההסתברות ששניים מהם יעברו את מבחן הנהיגה גבוה פי $\frac{8}{3}$ מהסיכוי שכל הארבעה יעברו את המבחן.

א. חשבו את ערכו של P.

ב. תלמיד ניגש לבחינה עד אשר הוא עובר אותה.
מה ההסתברות שיעבור את מבחן הנהיגה רק במבחן הרביעי?

ג. מה ההסתברות שיאלץ לגשת לפחות לחמישה מבחנים בסך הכול?

ד. מה התוחלת ומהי השונות של מספר המבחנים שבהם יכשל?

ה. ידוע שהתלמיד ניגש לשלושה מבחנים ועדיין לא עבר. מה ההסתברות שבסופו של דבר יעבור במבחן הנהיגה החמישי?

11) רובוט נמצא בנקודה 0 על ציר המספרים. הרובוט מבצע n צעדים ובכל צעד הוא נע בסיכוי P. ימינה ביחידה אחת ובסיכוי $1-P$ שמאלה ביחידה אחת.
נסמן ב- X את המספר עליו עומד הרובוט לאחר n צעדים.
רשמו את פונקציית ההסתברות של X באמצעות P ו- n.

12) למטבע יש סיכוי P לקבל את התוצאה ראש. מטילים את המטבע. אם יוצא ראש בפעם הראשונה מפסידים שקל ומפסיקים את המשחק. אחרת, ממשיכים לזרוק וזוכים במספר שקלים לפי מספר הפעמים שהטלנו את המטבע מההתחלה ועד שהתקבל ראש.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של רווח המשחק (באמצעות P).

ב. בטאו את תוחלת הרווח באמצעות P.

ג. לאלו ערכי P המשחק כדאי?

13) מטבע הוגן מוטל עד שמתקבל $m+1$ פעמים עץ.
רשמו את פונקציית ההסתברות של מספר הפעמים שהתקבל פלי.

14) נתונות N מגירות ממוספרות מ-1 ועד N. מתוך n חולצות, יש לבחור באופן אקראי לכל חולצה מגירה. כל מגירה יכולה להכיל את כל החולצות.
נגדיר את X_1 - כמספר החולצות שהונחו במגירה מספר 1.
נגדיר את X_N - כמספר החולצות שהונחו במגירה מספר N.
חשבו את: $V\left(X_1+X_N\right)$.

15) n אנשים יושבים במסעדה. בזמן שמגיע העת לשלם, האנשים פועלים לפי העיקרון הבא: כל אחד מהם מטיל מטבע הוגן עד אשר אחד מהם מקבל תוצאה שונה מכל השאר והוא זה שמשלם.
מהי תוחלת מספר הסבבים שיבוצעו עד שימצא משלם?

16) הסיכוי לעבור בקורס מסוים את מועד א׳ הוא 0.7. סטודנט שנכשל במועד א׳ בהכרח ניגש למועד ב׳ ואז הסיכוי שלו לעבור אותו הוא 0.8. אם סטודנט נכשל במועד ב׳ הוא ניגש למועד מיוחד ואחרון.
נתון שלמועד א׳ נגשו כל 20 הסטודנטים הרשומים לקורס.
מהי התפלגות מספר הבחינות שיאלץ המרצה לחבר?

17) לקניון 3 כניסות שונות. בכל כניסה מספר האנשים שנכנסים לקניון מתפלג פואסונית באופן בלתי תלוי בכניסה האחרת. מספר האנשים שנכנסים בכניסה ה-i מתפלג פואסונית עם קצב של i אנשים בשנייה.
יהי Y מספר האנשים שנכנסים לקניון בשנייה מכל הכניסות יחדיו.
מצאו את: $E\left[\frac{1}{Y+1}\right]$.

18) לרני 20 טושים אותם הוא מכניס באקראי ל-3 קלמרים. לכל טוש נבחר קלמר באקראי ובאופן בלתי תלוי בטוש אחר. כל קלמר יכול להכיל עד 20 טושים.
נסמן ב-X את מספר הקלמרים שיש בהם בדיוק 10 טושים.
חשבו את $E\left(\sqrt{x+7}\right)$.

19) בשדרות רוטשילד החליטו לשתול n ברושים ו-2 אורנים אחד אחרי השני בשורה. סידור העצים בשורה נעשה באקראי. נגדיר את X להיות מספר הברושים, בין הברוש הגבוה ביותר לברוש הנמוך ביותר שנשתלו.

א. מצאו את ההתפלגות של X.

ב. הוכיחו שהתוחלת של X היא $\frac{n-2}{3}$.

תשובות סופיות:

1) א. תוחלת: 2, סטיית תקן: 1. ב. תוחלת: 0, סטיית תקן: 2.
ג. תוחלת: 4.5, סטיית תקן: לא ניתן.

2) א. 0.03. ב. תוחלת: 0.15, שונות: 0.1875.
ג. 0.1328.

3) א. ראו טבלה: ב. תוחלת: 3, שונות: 2.

x	1	2	3	4	5
$P(x)$	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

ג. תוחלת: 1.5, שונות: 0.5.

4) א. 0.9975. ב. 0.0172. ג. 1.0025.

5) א. 0.375. ב. 0.6. ג. 0.282. ד. 0.282.

6) א. ראו טבלה: ב. תוחלת: 1.5, שונות: 0.61.

x	0	1	2	3
$P(x)$	0.092	0.392	0.428	0.084

ג. תוחלת: 0, סטיית תקן: 4.68.

7) א. 0.4348. ב. 0.0923.

8) א. 2.013. ב. 0.5256. ג. תוחלת: 8, שונות: 1.6.
ד. תוחלת: 10.5, שונות: 3.475.

9) 10.

10) א. 0.6. ב. 0.0384. ג. 0.0256.
ד. תוחלת: 0.67, שונות: 1.11. ה. 0.24.

11) $P(X=k)=\binom{n}{\frac{k+n}{2}}\cdot p^{\frac{k+n}{2}}\cdot(1-p)^{\frac{n-k}{2}}$.

12) א. $P(X=k)=\begin{cases} P & k=-1 \\ (1-P)^{K-1}\cdot P & k=2,3,\dots,\infty \end{cases}$. ב. $\frac{1-2p^2}{p}$.
ג. $0<p<\sqrt{\frac{1}{2}}$.

13) $k=0,1,\dots,\infty$, $P(X=k)=\binom{m+k}{m}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k+m+1}$.

14) $n\cdot\left(\frac{2}{N}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{N}\right)$.

15) $\frac{2^n}{2n}$.

16) ראו טבלה:

X	1	2	3
$P(X)$	0.0008	0.2893	0.7099

17) $\frac{e^{-6}}{6}\left[e^6-1\right]$.

18) 2.675.

19) א. $k=0,1,\dots,n-2$, $P(X=k)=\frac{n-k-1}{\binom{n}{2}}$.   ב. הוכחה.

סטטיסטיקה א

פרק 27 - המשתנה המקרי הרציף- התפלגויות כלליות (שימוש באינטגרלים)

תוכן העניינים

המשתנה המקרי הרציף – התפלגויות כלליות (שימוש באינטגרלים)

רקע:

בפרק זה נעסוק בהתפלגות של משתנים מקריים רציפים (גובה אדם אקראי, זמן תגובה וכו'). משתנים רציפים הם משתנים שבתחום מסוים מקבלים רצף אינסופי של ערכים אפשריים בניגוד למשתנים בדידים. נתאר את המשתנה המקרי הרציף על ידי פונקציה הנקראת פונקציית צפיפות.

באופן כללי נסמן פונקציית צפיפות של משתנה רציף כלשהו ב- $f(x)$.

השטח שמתחת לפונקציית הצפיפות נותן את ההסתברות. פונקציית צפיפות חייבת להיות לא-שלילית והשטח הכולל שמתחת לפונקציה יהיה תמיד 1.

הגדרות יסודיות:

יהא משתנה רציף X בעל פונקציית צפיפות $f(x)$.

פונקציית התפלגות מצטברת:

פונקציית ההתפלגות המצטברת מוגדרת באופן הבא: $F(t)=p(X\le t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)dx$

כמו כן מתקיים: $p(X>t)=1-F(t)$ ו- $p(a<X<b)=F(b)-F(a)$.

תוחלת ושונות של משתנה רציף:

תוחלת של משתנה רציף תחושב באופן הבא: $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} X\cdot f(x)dx=\mu$.

שונות של משתנה רציף תחושב באופן הבא: $V(X)=\int_{-\infty}^{\infty} X^2\cdot f(x)dx-\mu^2=\sigma^2$.

תוחלת של פונקציה של X:

תוחלת של פונקציית משתנה רציף X, המסומנת: $g(x)$, תחושב באופן הבא: $E(g(x))=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$.

אחוזונים:

האחוזון ה- p הוא ערך (נסמן אותו: x_p), שהסיכוי ליפול מתחתיו הוא p.
כלומר: $p(X \le x_p)=p$.

ריענון מתמטי:

נוסחאות לחישוב שטחים

שטח משולש: גובה (h) כפול הבסיס (a) חלקי 2: $S_{\text{triangle}}=\frac{h\cdot a}{2}$.

שטח מלבן: אורך (a) כפול רוחב (b): $S_{\text{rectangle}}=a\cdot b$.

משוואת קו ישר:

משוואת ישר מפורשת תסומן: $y=mx+n$, כאשר m הוא שיפוע הישר ו- n היא נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- y.

שיפוע ישר העובר דרך שתי נקודות: $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ הוא: $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

משוואת ישר שעובר דרך נקודה ספציפית (x_1,y_1) ושיפועו הוא m, תחושב באופן הבא: $y-y_1=m(x-x_1)$.

אינטגרלים מידיים:

$$\int a\,dx = ax + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$$

$$\int k^x dx = \frac{k^x}{\ln k} + c$$

$$\int k^{ax+b} dx = \frac{1}{a}\frac{k^{ax+b}}{\ln k} + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$$

$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$\int \tan(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\ln|\cos(ax+b)| + c$$

$$\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + c$$

$$\int \cot(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\ln|\sin(ax+b)| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\frac{1}{\sin x} - \cot x\right| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$$

$$\int \frac{f'}{f} dx = \ln|f| + c$$

$$\int f \cdot f'\,dx = \frac{1}{2} f^2 + c$$

$$\int e^f \cdot f'\,dx = e^f + c$$

$$\int \cos f \cdot f'\,dx = \sin(f) + c$$

$$\int \sin f \cdot f'\,dx = -\cos(f) + c$$

$$\int \frac{f'}{\sqrt{f}} dx = 2\sqrt{f} + c$$

$$\int \sqrt{f} \cdot f'\,dx = \frac{2}{3} f^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int u \cdot v'\,dx = u \cdot v - \int u' \cdot v\,dx$$

שאלות:

1) X הינו משתנה רציף עם פונקציית צפיפות כמוצג בשרטוטו:

א. מצאו את ערכו של c.

ב. בנו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.

ג. חשבו את ההסתברויות הבאות:

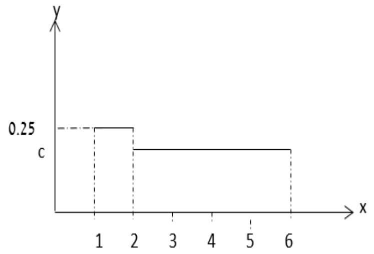
i. $P(x<4)$.

ii. $P(x>1.5)$.

iii. $P(1.5<x<5)$.

iv. $P(5<x<10)$.

v. מצאו את החציון של המשתנה.



2) נתון משתנה מקרי רציף A שפונקציית הצפיפות שלו היא: $f(x)=\begin{cases} cx & 0\le x\le b \\ 0 & else \end{cases}$,

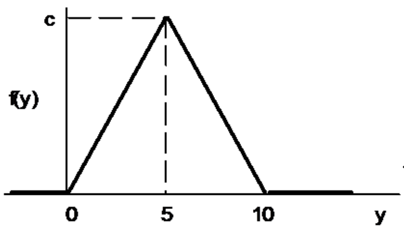
וידוע ש- $P(0<X<1)=\frac{1}{4}$.

א. מצאו במפורש את פונקציית הצפיפות של X.

ב. מצאו את החציון של X.

ג. מה הסיכוי ש-X קטן מ-0.5?

3) נתונה פונקציית צפיפות של משתנה מקרי Y:



א. מצאו את c.

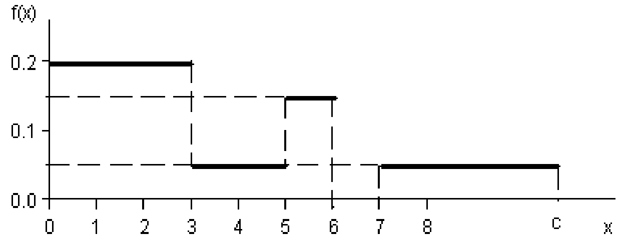
ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y.

ג. חשבו את ההסתברויות הבאות:

$P(Y>4)$, $P(7.5\le Y\le 15.5)$, $P(Y\le 3.0)$, $P(Y=7.0)$.

ד. מצאו את העשירון התחתון: $y_{0.1}$, הרבעון התחתון: $y_{0.25}$ והחציון של Y.
הסיקו מהו העשירון עליון: $y_{0.9}$.

4) נתונה פונקציית צפיפות של משתנה מקרי X :



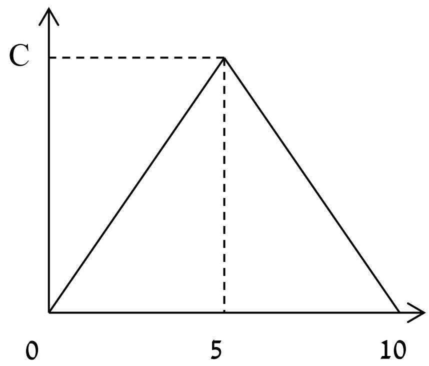
א. מצאו ערך c שעבורו תתקבל פונקציית צפיפות.

ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.

ג. חשבו את ההסתברויות הבאות :

$P(X \ge 4)$, $P(X \ge -2.0)$, $P(1.0 < X \le 5.0)$.

5) נתונה פונקציית הצפיפות הבאה :



א. מה ערכו של c?

ב. מצאו אינטרוול (תחום) סימטרי סביב הערך 5, שהסיכוי ליפול בו הינו 0.5.

6) נתונה פונקציית צפיפות : $f(X) = \frac{2}{x}$, המוגדרת מ-1 עד K .

א. מצאו את ערכו של K .

ב. בנו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.

ג. חשבו את הסיכוי ש-X לפחות 1.5.

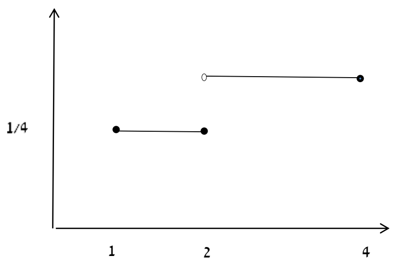
ד. מצאו את העשירון התחתון של ההתפלגות.

ה. מה התוחלת של X?

7) נתונה פונקציית צפיפות הבאה: $f(X)=AX^2(10-X)$, $0<X<10$.
A הינו קבוע חיובי.
א. מצאו את A.
ב. חשב את: $P(x>5|x>2)$.
ג. מה התוחלת ומהי השונות של X?

8) פונקציית הצפיפות של משתנה מקרי רציף X:
$f(x)=0.5\cdot e^{2x}$, $-\infty\le X\le \ln(c)$.
א. מצאו את ערכו של c.
ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של ההתפלגות.
ג. חשב: $P(X>0)$.
ד. מהו הרבעון העליון של ההתפלגות?

9) נתונה פונקציית הצפיפות הבאה של משתנה מקרי X:



א. רשמו את נוסחת פונקציית הצפיפות.
ב. בנו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.
ג. מצאו את החציון של ההתפלגות.
ד. חשבו את התוחלת והשונות של המשתנה.
ה. חשבו את: $E(X^3)$.

10) במפעל מייצרים מוצר A. זמן תהליך הייצור של המוצר בשעות הוא בעל פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x)=6x(1-x)$, $0\le x\le 1$.
א. מה ההסתברות שזמן הייצור של מוצר A אקראי יהיה קטן מ-20 דקות?
ב. מה ההסתברות שזמן הייצור של מוצר A אקראי יהיה בדיוק חצי שעה?
ג. נבחרו חמישה מוצרים אקראיים מסוג A. מה תוחלת מספר המוצרים שזמן הייצור שלהם יהיה גדול מ-20 דקות?

11) זמן ההמתנה בדקות של לקוח בתור למכולת השכונתית מתפלג עם פונקציית ההתפלגות המצטברת הבאה: $F(t)=1-e^{-0.2t}$.
א. שרטטו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.
ב. מה הסיכוי שזמן ההמתנה יהיה לפחות רבע שעה?
ג. אם חיכיתי בתור כבר 10 דקות מה ההסתברות שאאלץ לחכות בסך הכול פחות מרבע שעה?
ד. מהו הזמן ש-90% מהלקוחות מחכים מתחתיו?

12) פונקציית הצפיפות של משתנה מקרי נתונה על ידי הנוסחה הבאה:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x<4 \\ bx-4b & 4\le x\le 5 \\ b & 5<x\le 6 \\ 0 & x>6 \end{cases}.$$

א. מצאו את b.

ב. חשבו את התוחלת של X.

ג. y הוא משתנה אינדיקטור המקבל את הערך 1 אם X קטן מ-5.
מהי השונות של y?

13) נתונה פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{4} & 1\le x\le 2 \\ kx & 2<x\le 3 \end{cases}$.

א. מצאו את ערכו של k.

ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.

ג. חשבו $P(x>2.5)$.

14) להלן משתנה מקרי בעל פונקציית צפיפות הבאה: $a\le x\le b$, $f(x)=\frac{1}{b-a}$.

א. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.

ב. חשב את התוחלת והשונות של ההתפלגות.

ג. מצאו את התוחלת של $\frac{1}{X}$.

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{3}{16}$. ב. $F(t)=\begin{cases}0 & t<1\\ (t-1)0.25 & 1\le t\le 2\\ 0.25+(t-2)\cdot\frac{3}{16} & 2<t\le 6\\ 1 & t>6\end{cases}$. ג. i. $\frac{5}{8}$.

ii. $\frac{7}{8}$. iii. $\frac{11}{16}$. iv. $\frac{3}{16}$. ד. $3\frac{1}{3}$.

2) א. $b=2$, $c=0.5$. ב. 1.41. ג. 0.0625.

3) א. 0.2. ב. $F(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 0.02t^2 & 0\le t\le 5\\ 1-0.02(t-10)^2 & 5<t\le 10\\ 1 & t>10\end{cases}$.

ג. 0, 0.18, 0.125, 0.32.

ד. עשירון תחתון: 2.24, רבעון תחתון: 3.54, החציון: 5, עשירון עליון: 7.76.

4) א. 10. ב. $F(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 0.2t & 0<t\le 3\\ 0.6+(t-3)\cdot 0.05 & 3<t\le 5\\ 0.7+(t-5)\cdot 0.15 & 5<t\le 6\\ 0.85 & 6<t\le 7\\ 0.85+(t-7)\cdot 0.05 & 7<t\le 10\\ 1 & t>10\end{cases}$. ג. 0.5.

5) א. $c=0.2$. ב. 5 ± 1.46.

6) א. $e^{\frac{1}{2}}$. ב. $F(t)=\begin{cases}0 & t<1\\ 2\cdot\ln t & 1\le t\le e^{\frac{1}{2}}\\ 1 & t>e^{\frac{1}{2}}\end{cases}$. ג. 0.189.

ד. 1.051. ה. 1.297.

7) א. 0.0012. ב. 0.7067. ג. תוחלת: 6, שונות: 4.

8) א. 2. ב. $F(t)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{2t} & t\le \ln(2)\\ 1 & t>\ln(2)\end{cases}$. ג. 0.75. ד. 0.549.

9) א. $\begin{cases}\frac{1}{4} & 1\le x\le 2\\ \frac{3}{8} & 2<x\le 4\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$ $F(t)=$. ב. $F(t)=\begin{cases}0 & t<1\\ (t-1)0.25 & 1\le t\le 2\\ 0.25+(t-2)\cdot\frac{3}{8} & 2<t\le 4\\ 1 & t>4\end{cases}$.

ג. $2\frac{2}{3}$. ד. תוחלת: 2.625, שונות: 0.6927. ה. 23.4375.

10) א. $\frac{7}{27}$. ב. 0. ג. 3.704.

11) א. עיין סרטוט בוידאו ב. 0.0498 ג. 0.6321 ד. 11.51.

12) א. $\frac{2}{3}$. ב. 5.22. ג. $\frac{2}{9}$.

13) א. $\frac{1}{6}$. ב. $F(t)=\begin{cases}0 & t<1\\ \frac{t^3-1}{12} & 1\le t\le 2\\ \frac{7}{12}+\frac{t^2-4}{12} & 2<t\le 3\\ 1 & t>3\end{cases}$. ג. 0.229.

14) א. $F(t)=\begin{cases}0 & t<a\\ \frac{(t-b)}{b-a} & a\le t\le b\\ 1 & t>b\end{cases}$. ב. תוחלת: $E(X)=\frac{a+b}{2}$, שונות: $V(x)=\frac{(b-a)^2}{12}$.

ג. $\frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{b-a}$.

סטטיסטיקה א

פרק 28 - התפלגויות רציפות מיוחדות- התפלגות מעריכית

תוכן העניינים

התפלגויות רציפות מיוחדות – התפלגות מעריכית:

רקע:

התפלגות זו היא התפלגות רציפה המאפיינת את הזמן עד להתרחשות מאורע מסוים.
λ - הוא ממוצע מספר האירועים המתרחשים ביחידת זמן (אותו פרמטר מההתפלגות הפואסונית): $X \sim \exp(\lambda)$ כאשר $\lambda > 0$.
התפלגות זו צריכה להיות נתונה בתרגיל או שיאמר שמספר האירועים ביחידת זמן מתפלג פואסונית ואז הזמן עד התרחשות המאורע הבא מתפלג מעריכית.

פונקציית הצפיפות של ההתפלגות:

$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ לכל $x \geq 0$.

פונקציית ההתפלגות המצטברת: $F(t) = p(x \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

התוחלת: $E(x) = \frac{1}{\lambda}$.

השונות: $V(x) = \frac{1}{\lambda^2}$.

להתפלגות זו יש תכונת חוסר הזיכרון: $P(X > a + b \setminus X > a) = P(X > b)$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

אורך חיי סוללה מתפלג מעריכית עם תוחלת של 8 שעות.

א. מה ההסתברות שסוללה תחזיק מעמד פחות מ-9 שעות?

ב. מה סטיית התקן של אורך חיי הסוללה?

ג. אם סוללה כבר חייה מעל שעתיים, מה הסיכוי שהיא תחייה מעל 7 שעות בסך הכול?

שאלות:

1) הזמן שלוקח במערכת עד שתקלה מתרחשת מתפלג מעריכית עם תוחלת של 0.5 שעה.

א. מה הסתברות שהתקלה הבאה תתרחש תוך יותר מ-0.5 שעה?

ב. מה ההסתברות שהתקלה הבאה תתרחש תוך פחות משעה?

ג. מצא את הזמן החציוני להתרחשות תקלה במערכת.

2) הזמן שעובר בכביש מסוים עד להתרחשות תאונה מתפלג מעריכית עם תוחלת של 24 שעות.

א. מהי סטית התקן של הזמן עד להתרחשות תאונה?

ב. מה ההסתברות שהתאונה הבאה תתרחש תוך פחות מיממה?

ג. מהי ההסתברות שהתאונה הבאה תתרחש תוך לפחות יומיים?

3) משך הזמן X (בדקות) שסטודנטים עובדים רצוף על מחשב מתפלג מעריכית עם תוחלת של 30 דקות.

א. מה הסיכוי שעבודת סטודנט על המחשב תארך פחות מרבע שעה?

ב. מה הסיכוי שעבודת סטודנט על המחשב תארך בין רבע שעה לחצי שעה?

ג. אם סטודנט עובד על המחשב כבר יותר מ-10 דקות, מה ההסתברות שמשך כל עבודתו יעלה על 30 דקות?

ד. מהו הזמן שבסיכוי של 90% הסטודנט יעבוד פחות ממנו?

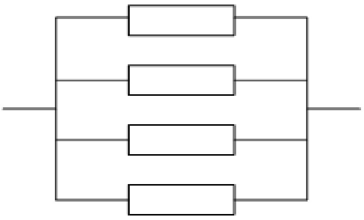
4) בממוצע מגיעים לחדר מיון 4 חולים בשעה בזרם פואסוני.

א. שולה המזכירה הגיעה לחדר המיון. מה ההסתברות שזמן ההמתנה שלה לחולה הבא יהיה יותר מ-20 דקות?

ב. אם שולה המתינה יותר מרבע שעה לחולה הבא. מה ההסתברות שתמתין בסך הכל יותר מחצי שעה?

ג. מה ההסתברות שבין החולה הראשון לשני יש להמתין יותר מרבע שעה ובין החולה שני לשלישי יש להמתין פחות מרבע שעה?

5) מערכת חשמלית כוללת 4 רכיבים אלקטרוניים זהים הפועלים במקביל כמתואר בשרטוט:



על מנת שהמערכת תפעל בצורה תקינה נדרש שלפחות אחד מהמרכיבים יהיה תקין.
אורך החיים של כל רכיב מתפלג מעריכית עם ממוצע של 100 שעות.

א. מה ההסתברות שהמערכת תפעל בצורה תקינה במשך 100 שעות לפחות?

ב. מעוניינים להוסיף במקביל עוד רכיב למערכת.
עלות הוספת רכיב היא K ₪.
כמו כן אם המערכת עבדה פחות מ-100 שעות נגרם הפסד של A ₪.
מה התנאי שבו יהיה כדאי להוסיף את הרכיב למערכת?

תשובות סופיות:

1)	א. 0.368.	ב. 0.865.	ג. 0.347.	
2)	א. 24 שעות.	ב. 0.632.	ג. 0.135.	
3)	א. 0.393.	ב. 0.239.	ג. 0.513.	ד. 69.08
4)	א. 0.264.	ב. 0.368.	ג. 0.233.	
5)	א. 0.8403.	ב. $K < 0.0588A$.		

סטטיסטיקה א

פרק 29 - התפלגויות רציפות מיוחדות-התפלגות אחידה

תוכן העניינים

התפלגויות רציפות מיוחדות – התפלגות אחידה:

רקע:

זו התפלגות שפונקציית הצפיפות שלה קבועה בין a לבין b.

$X \sim U(a,b)$.

פונקציית הצפיפות:

$$f(x)=\frac{1}{b-a} \quad a \le x \le b$$.

פונקציית ההתפלגות המצטברת:

$$F(t)=\frac{t-a}{b-a}$$.

התוחלת :

$$E(X)=\frac{a+b}{2}$$.

השונות:

$$V(x)=\frac{(b-a)^2}{12}$$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

X - משתנה מקרי רציף המתפלג באופן אחיד בין 20 ל-40.

מה הסיכוי ש-X קטן מ-25?

מה התוחלת והשונות של X?

$a = 20\ ,\ b = 40$

$X \sim U(20,40)$.

א. $P(x < 25) = f(25) = \frac{25-20}{40-20} = 0.25$.

ב. $E(x) = \frac{20+40}{2} = 30$

$V(x) = \frac{(40-20)^2}{12} = 33\frac{1}{3}$.

שאלות:

1) משך (בדקות) הפסקה בשיעור, X, מתפלג: $U(13,16)$.

א. מהי התוחלת ומהי סטית התקן של משך ההפסקה?

ב. מהי ההסתברות שהפסקה תמשך יותר מ-15 דקות?

ג. מהי ההסתברות שמשך ההפסקה יסטה מהתוחלת בפחות מדקה?

2) רכבת מגיעה לתחנה בשעות היום כל עשר דקות. אדם הגיע לתחנה בזמן אקראי.

א. הסבר כיצד מתפלג זמן ההמתנה לרכבת?

ב. אם זמן ההמתנה לרכבת ארך יותר מ-5 דקות, מהי ההסתברות שבסך הכל האדם ימתין לרכבת פחות מ-8 דקות?

ג. מה תוחלת מספר הימים שיעברו עד הפעם הראשונה שהאדם ימתין לרכבת יותר מ-9 דקות?

3) מכונה אוטומטית ממלאת גביעי גלידה. משקל הגלידה לגביע מתפלג אחיד בין 100-110 גרם (המשקל הוא של גלידה ללא הגביע).

א. מה ההסתברות שמשקל הגלידה בגביע יהיה מעל 108 גרם?

ב. נתון שהגלידה בגביע עם משקל נמוך מ-107 גרם. מה ההסתברות שמשקל הגלידה יהיה מעל 105 גרם?

ג. מה העשירון העליון של משקל הגלידה בגביע?

ד. עלות גביע גלידה היא 0.5 שקל. כל גרם של גלידה עולה 0.22 אגורות. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של עלות הגביע ביחד עם הגלידה?

תשובות סופיות:

1) א. תוחלת: 14.5, שונות: 0.866. ב. $\frac{1}{3}$. ג. $\frac{2}{3}$.

2) א. $X \sim U(0,10)$. ב. 0.6. ג. 10.

3) א. 0.2. ב. $\frac{2}{7}$. ג. 109.

ד. תוחלת: 73.1 אגורות, סטיית תקן: 0.635 אגורות.

סטטיסטיקה א

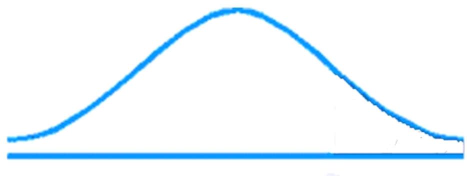
פרק 30 - התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות נורמלית

תוכן העניינים

התפלגויות רציפות מיוחדות – התפלגות נורמלית:

רקע:

התפלגות נורמלית הינה התפלגות של משתנה רציף. ישנם משתנים רציפים מסוימים שנהוג להתייחס אליהם כנורמליים כגון: זמן ייצור, משקל תינוק ביום היוולדו ועוד. פונקציית הצפיפות של ההתפלגות הנורמלית נראית כמו פעמון:



לעקומה זו קוראים גם עקומת גאוס ועקומה אחת נבדלת מהשנייה באמצעות הממוצע וסטיית התקן שלה.

אלה הם הפרמטרים שמאפיינים את ההתפלגות: $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$.

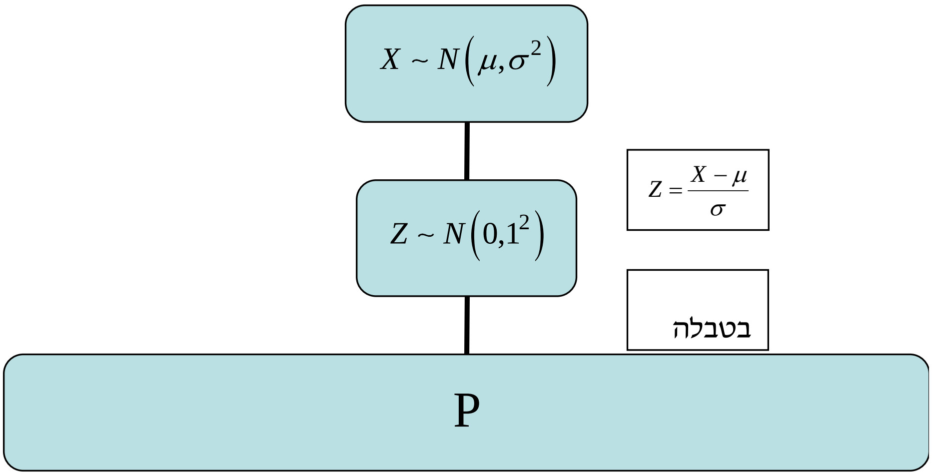
נוסחת פונקציית הצפיפות: $f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

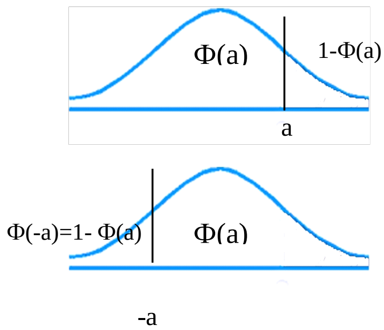
כדי לחשב הסתברויות בהתפלגות נורמלית יש לחשב את השטחים הרלוונטיים שמתחת לעקומה. כדי לחשב שטחים אלה נמיר כל התפלגות נורמלית להתפלגות נורמלית סטנדרטית על ידי תהליך הנקרא תקנון. התפלגות נורמלית סטנדרטית היא התפלגות נורמלית שהממוצע שלה הוא אפס וסטיית התקן היא אחת, והיא תסומן באות Z: $Z \sim N\left(0,1^2\right)$.

תהליך התקנון מבוצע על ידי הנוסחה הבאה: $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$.

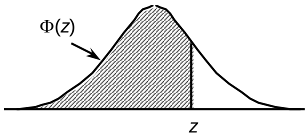
אחרי תקנון מקבלים ערך הנקרא ציון תקן.
ציון התקן משמעו בכמה סטיות תקן הערך סוטה מהממוצע.

לאחר חישוב ציון התקן של ערך מסוים נעזרים בטבלה של ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית לחישוב השטח הרצוי, ובאופן כללי נתאר את הסכמה הבאה:


$X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$
$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$
$Z \sim N\left(0,1^2\right)$
בטבלה
P


Φ(a)
1-Φ(a)
a
Φ(-a)=1- Φ(a)
Φ(a)
-a

טבלת ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית – ערכי $\Phi(z)$:



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

z	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
Φ(z)	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.99995	0.999995

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

משקל חפיסות שוקולד המיוצרות בחברה מתפלג נורמלית עם ממוצע 100 גרם בסטיית תקן של 8 גרם.

1) מה אחוז חפיסות השוקולד ששוקלות מתחת ל-110 גרם?
2) מה אחוז חפיסות השוקולד השוקלות מעל 110 גרם?
3) מה אחוז חפיסות השוקולד השוקלות מתחת ל 92 גרם?
4) מהו המשקל ש-90% מהחפיסות בקו הייצור שוקלים פחות מהם?

שאלות:

1) הגובה של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 170 ס"מ וסטית תקן של 10 ס"מ.
   א. מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל-182.4 ס"מ?
   ב. מה אחוז האנשים שגובהם מעל 190 ס"מ?
   ג. מה אחוז האנשים שגובהם בדיוק 173.6 ס"מ?
   ד. מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל-170 ס"מ?
   ה. מה אחוז האנשים שגובהם לכל היותר 170 ס"מ?

2) נתון שהזמן שלוקח לתרופה מסוימת להשפיע מתפלג נורמלית עם ממוצע של 30 דקות ושונות של 9 דקות רבועות.
   א. מהי פרופורציית המקרים בהן התרופה תעזור אחרי יותר משעה?
   ב. מה אחוז מהמקרים שבהן התרופה תעזור בין 35 ל-37 דקות?
   ג. מה הסיכוי שהתרופה תעזור בדיוק תוך 36 דקות?
   ד. מה שיעור המקרים שבהן ההשפעה של התרופה תסטה מ-30 דקות בפחות מ-3 דקות?

3) המשקל של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 60 ק"ג וסטיית תקן של 8 ק"ג.
   א. מה אחוז האנשים שמשקלם נמוך מ-55 ק"ג?
   ב. מהי פרופורציית האנשים באוכלוסייה שמשקלם לפחות 50 ק"ג?
   ג. מהי השכיחות היחסית של האנשים באוכלוסייה שמשקלם בין 60 ל-70 ק"ג?
   ד. לאיזה חלק מהאוכלוסייה משקל הסוטה מהמשקל הממוצע בלא יותר מ-4 ק"ג?
   ה. מה הסיכוי שאדם אקראי ישקול מתחת ל-140 ק"ג?

4) משקל תינוקות ביום היוולדם מתפלג נורמלית עם ממוצע של 3300 גרם וסטיית תקן 400 גרם.
   א. מצאו את העשירון העליון.
   ב. מצאו את האחוזון ה-95.
   ג. מצאו את העשירון התחתון.

5) ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמלית עם ממוצע 100 ושונות 225.
א. מה העשירון העליון של הציונים במבחן האינטיליגנציה?
ב. מה העשירון התחתון של ההתפלגות?
ג. מהו הציון ש-20% מהנבחנים מקבלים מעליו?
ד. מהו האחוזון ה-20?
ה. מהו הציון ש-5% מהנבחנים מקבלים מתחתיו?

6) נפח משקה בבקבוק מתפלג נורמלית עם סטיית תקן של 20 מ"ל, ונתון ש-33% מהבקבוקים בעלי נפח שעולה על 508.8 מ"ל.
א. מה ממוצע נפח משקה בבקבוק?
ב. 5% מהבקבוקים המיוצרים עם הנפח הגבוה ביותר נשלחים לבדיקה, החל מאיזה נפח שולחים בקבוק לבדיקה?
ג. 1% מהבקבוקים עם הנפח הקטן ביותר נתרמים לצדקה, מהו הנפח המקסימלי לצדקה?

7) אורך חיים של מכשיר מתפלג נורמלית. ידוע שמחצית מהמכשירים חיים פחות מ-500 שעות, כמו כן ידוע ש-67% מהמכשירים חיים פחות מ-544 שעות.
א. מהו ממוצע אורך חיי מכשיר?
ב. מהי סטית בתקן של אורך חיי מכשיר?
ג. מה הסיכוי שמכשיר אקראי יחיה פחות מ-460 שעות?
ד. מהו המאיון העליון של אורח חיי מכשיר?
ה. 1% מהמכשירים בעלי אורך החיים הקצר ביותר נשלח למעבדה לבדיקה מעמיקה. מהו אורך החיים המקסימלי לשליחת מכשיר למעבדה?

8) להלן שלוש התפלגויות נורמליות של שלוש קבוצות שונות ששורטטו באותה מערכת צירים. ההתפלגויות מוספרו כדי להבדיל ביניהן.
א. לאיזו התפלגות הממוצע הגבוה ביותר?
ב. במה מבין המדדים הבאים התפלגות 1 ו-2 זהות?
i. בעשירון העליון.
ii. בממוצע.
iii. בשונות.
ג. לאיזו התפלגות סטיית התקן הקטנה ביותר?
i. 1.
ii. 2.
iii. 3.
iv. אין לדעת.

9) הזמן שלוקח לאדם להגיע לעבודתו מתפלג נורמלית עם ממוצע של 40 דקות וסטית תקן של 5 דקות.

א. מה ההסתברות שמשך הנסיעה של האדם לעבודתו יהיה לפחות שלושת רבעי השעה?

ב. אדם יצא לעבודתו בשעה 08:10 מביתו. הוא צריך להגיע לעבודתו בשעה 09:00. מה הסיכוי שיאחר לעבודתו?

ג. אם ידוע שזמן נסיעתו לעבודה היה יותר משלושת רבעי השעה. מה ההסתברות שזמן הנסיעה הכולל יהיה פחות מ-50 דקות?

ד. מה הסיכוי שבשבוע (חמישה ימי עבודה) בדיוק פעם אחת יהיה זמן הנסיעה לפחות שלושת רבעי השעה?

10) ההוצאה החודשית לבית אב בעיר "טרירה" מתפלגת נורמלית עם ממוצע של 2000 דולר וסטית תקן של 300 דולר. בחרו באקראי 5 בתי אב. ההסתברות שלפחות אחד מהם מוציא בחודש מעל ל- T דולר היא 0.98976.

א. מה ערכו של T?

ב. מה הסיכוי שההוצאה החודשית של בית אב בעיר תהיה לפחות סטיית תקן אחת מעל T?

ג. מסתבר שנפלה טעות בנתונים, ויש להוסיף 100 דולר להוצאות החודשית של כל בתי האב בעיר. לאור זאת, מה ההסתברות שההוצאה החודשית של בית אב נמוכה מ-1800 דולר?

11) אורך שיר אקראי המשודר ברדיו מתפלג נורמלית עם תוחלת של 3.5 דקות וסטיית תקן של שלושים שניות.

א. מה ההסתברות שאורך של שיר אקראי המנוגן ברדיו יהיה בין 3 ל-2.5 דקות?

ב. מהו הטווח הבין רבעוני של אורך שיר המשודר ברדיו?

ג. ביום מסוים מנוגנים 200 שירים ברדיו. כמה שירים מתוכם תצפה שיהיו באורך הנמוך מ-3.5 דקות?

ד. בשעה מסוימת שודרו 8 שירים. מה ההסתברות שרבע מהם בדיוק היו ארוכים מ-4 דקות והיתר לא?

תשובות סופיות:

1)	א. 89.25%.	ב. 2.28%.	ג. 0.	ד. 50%.	ה. 50%.
2)	א. 0%.	ב. 3.76%.	ג. 0%.	ד. 68.26%.	
3)	א. 26.43%.	ב. 89.44%.	ג. 39.44%.	ד. 0.383.	
	ה. 100%.				
4)	א. 3812.8.	ב. 3958.	ג. 2787.2.		
5)	א. 119.2.	ב. 80.8.	ג. 112.6.	ד. 87.4.	
6)	א. 500.	ב. 532.9.	ג. 453.48.		
7)	א. 500.	ב. 100.	ג. 0.3446.	ד. 733.	
	ה. 267.				
8)	א. 3.	ב. בממוצע.	ג. 1.		
9)	א. 0.1587.	ב. 0.0228.	ג. 0.8563.	ד. 0.3975.	
10)	א. 1925.	ב. 0.2266.	ג. 0.1587.		
11)	א. 0.1359.	ב. 0.675.	ג. 100.	ד. 0.25.	

סטטיסטיקה א

פרק 31 - משתנה דו-מימדי בדיד - פונקציית הסתברות משותפת

תוכן העניינים

משתנה דו מימדי בדיד – פונקציית הסתברות משותפת:

רקע:

התפלגות דו ממדית הינה התפלגות שדנה בשני משתנים. נרצה כעת לבנות פונקציית הסתברות דו ממדית, בה יש התפלגות של שני משתנים בו זמנית: X ו- Y.

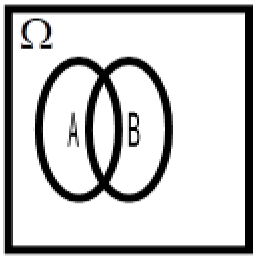
דוגמה:

תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים: מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה. כמו כן, נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8, הסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9 והסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75.

יהי X מספר הקורסים שהסטודנט עבר. ויהי Y משתנה אינדיקטור המקבל את הערך 1 אם הסטודנט עבר את הבחינה בכלכלה, ו-0 אחרת.

בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y.

נחשב את כל ההסתברויות המשותפות:



y/x	0	1	2
0	0.05	0.15	0
1	0	0.05	0.75

$$p(x=o,y=0)=0.05$$
$$p(x=o,y=1)=0$$
$$p(x=1,y=0)=0.15$$
$$p(x=1,y=1)=0.05$$
$$p(x=2,y=0)=0$$
$$p(x=2,y=1)=0.75$$

שימו לב שסכום כל ההסתברויות בפונקציית ההסתברות המשותפת הוא 1.

כעת נסכם את השורות ואת העמודות ונקבל את פונקציות הסתברות שוליות:

Y/X	0	1	2	P_Y
0	0.05	0.15	0	0.2
1	0	0.05	0.75	0.8
P_X	0.05	0.2	0.75	1

משתנים בלתי תלויים:

X ו- Y יהיו משתנים בלתי תלויים, אם עבור כל X ו- Y אפשריים התקיים הדבר הבא: $p(x=k, y=l) = p(x=k)\cdot p(y=l)$.

מספיק פעם אחת שהמשתנים אינם מקיימים תנאי זה אזי הם תלויים.

דוגמה:

$p(x=2, y=1) = 0.75 \neq p(x=2)\cdot p(y=1) = 0.75\cdot 0.8 = 0.6$.

ככלל, אם יש אפס בתוך פונקציית ההסתברות המשותפת ניתן להבין באופן מידי שהמשתנים תלויים, שאז הרי התנאי לא מתקיים. אך אם אין אפס בטבלה, אין זה אומר שהמשתנים בלתי תלויים ויש לבדוק זאת.

שאלות:

1) אדם נכנס לקזינו עם 75 דולר. הוא ישחק במכונת מזל בה יש סיכוי של 0.3 לנצח. במקרה של ניצחון במשחק הוא יקבל מהקזינו 25 דולר ובמקרה של הפסד הוא ישלם 25 דולר. אותו אדם החליט שיפסיק לשחק ברגע שיהיה לו 100 דולר, אך בכל מקרה לא ישחק יותר מ-3 משחקים.
נגדיר את X להיות הכסף שברשות האדם בצאתו מהקזינו ואת Y כמספר המשחקים שהאדם שיחק.

א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת והשוליות.

ב. מה תוחלת מספר המשחקים שישחק האדם?

ג. אם האדם יצא מהקזינו שברשותו 100 דולר, מה התוחלת ומהי השונות של מספר המשחקים ששיחק?

2) להלן פונקציית ההסתברות המשותפת והשוליות של שני משתנים מקריים בדידים:

Y/X	0	1	2	$P(Y)$
2		0.08	0.12	0.4
3	0.1	0.05		
4				0.45
$P(X)$		0.4	0.2	

א. השלימו את ההסתברויות החסרות בטבלה.

ב. האם X ו-Y תלויים?

ג. מצאו את הסתברות ש-$Y=3$, אם ידוע ש-$X=1$.

3) מפעל משווק מוצר הנארז בחבילות בגדלים שונים. ישנו מספר שווה של חבילות בנות שני מוצרים ושלושה מוצרים. ההסתברות שמוצר מסוים יהיה פגום היא $\frac{1}{10}$. מהנדס הייצור בוחר באקראי חבילת מוצרים לשם בקרת איכות.
יהי X מספר המוצרים בחבילה, ו-Y מספר המוצרים הפגומים בחבילה.

א. מה ההתפלגות של המשתנה Y בהינתן $x=3$.

ב. מה ההתפלגות של המשתנה Y בהינתן X הינו K כלשהו.

ג. מהי תוחלת מספר המוצרים הפגומים בחבילות בנות 3 מוצרים? נמקו.

ד. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת.

4) מתוך כד עם 3 כדורים ממוספרים במספרים 2, 4, 8 שולפים באקראי שניים ללא החזרה. יהי X המספר הקטן מבין השניים ו- Y הגדול מביניהם.

א. חשבו את ההתפלגות של (X,Y).

ב. אם המספר המינימאלי שנבחר הוא 2, מה הסיכוי שהמקסימאלי הוא 8?

ג. חשבו את ההתפלגות המותנית של X בהינתן $Y=4$. מצאו: $E(X/Y=4)$.

5) ביישוב שני סניפי בנק. סניף פועלים וסניף לאומי. להלן הנתונים לגבי האוכלוסייה הבוגרת המתגוררת ביישוב: ל-60% יש חשבון בסניף פועלים של היישוב, ל-50% יש חשבון בסניף לאומי של היישוב ול-95% יש חשבון בלפחות אחד מהסניפים.
יהי X מספר הסניפים בישוב אשר לתושב בוגר יש בהם חשבון, ויהי Y משתנה אינדיקטור:
1 – אם יש לתושב חשבון בסניף פועלים.
0 – אחרת.

א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y.

ב. הוסיפו את פונקציית ההסתברות השולית.

ג. ידוע שלתושב בוגר חשבון בבנק פועלים, מה ההסתברות שיש לו חשבון בנק בסניף אחד בלבד?

תשובות סופיות:

1) א. להלן טבלה:

$x\backslash y$	0	50	100	$P(y)$
1	0	0	0.3	0.3
3	0.343	0.294	0.063	0.7
$P(x)$	0.343	0.294	0.363	1

ב. 2.4.
ג. תוחלת: 1.348, שונות: 0.575.

2) א. להלן טבלה:

$x\backslash y$	0	1	2	$P(y)$
2	0.2	0.08	0.12	0.4
3	0.1	0.05	0	0.15
4	0.1	0.27	0.08	0.45
$P(x)$	0.4	0.4	0.2	1

ב. תלויים.
ג. 0.125.

3) א. $y/x=3\sim B\left(n=3,\ p=\frac{1}{10}\right)$.
ב. $y/x=k\sim B\left(n=k\,,p=\frac{1}{10}\right)$.
ג. 0.3.
ד. להלן טבלה:

$x\backslash y$	2	3	$P(y)$
0	0.405	0.3645	
1	0.09	0.1215	
2	0.005	0.0135	
3	0	0.0005	
$P(x)$	0.5	0.5	1

4) א. להלן טבלה:

$x\backslash y$	2	4	$P(y)$
4	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
8	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$P(x)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

ב. 0.5.
תוחלת: 2.

5) א+ב. להלן טבלה: ג. 0.75.

$x \backslash y$	**0**	**1**	**2**	$P(y)$
0	0.05	0.35	0	0.4
1	0	0.45	0.15	0.6
$P(x)$	0.05	0.8	0.15	1

סטטיסטיקה א

פרק 32 - משתנה דו מימדי בדיד - מתאם בין משתנים

תוכן העניינים

משתנה דו מימדי בדיד – מתאם בין משתנים:

רקע:

נרצה לבדוק את מידת ההתאמה הלינארית בין שני המשתנים על ידי מקדם המתאם הלינארי שמסומן ב- ρ.
מקדם מתאם זה מקבל ערכים בין 1- ל-1.

-1 0 1

מקדם מתאם 1- או 1 אומר שקיים קשר לינארי מוחלט ומלא בין המשתנים, שניתן לבטאו על ידי הנוסחה: $y=ax+b$.
מתאם חיובי מלא (מקדם מתאם 1) אומר שקיים קשר ליניארי מלא בו השיפוע a יהיה חיובי ואילו מתאם שלילי מלא אומר שקיים קשר ליניארי מלא בו השיפוע a שלילי (מקדם מתאם 1-).
מתאם חיובי חלקי אומר שככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לעלות בערכו אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט ואילו מתאם שלילי חלקי אומר שככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט.

חישוב מקדם המתאם:

הנוסחה של מקדם המתאם היא: $\rho=\dfrac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sigma_x\cdot\sigma_y}$.

השונות המשותפת: $\operatorname{cov}(x,y)=E\left[\left(x-\mu_x\right)\left(y-\mu_y\right)\right]=E(x\cdot y)-E(x)\cdot E(y)$.

תכונות של השונות המשותפת:

1) $\operatorname{cov}(X,Y)=\operatorname{cov}(Y,X)$.

2) $\operatorname{cov}(X,X)=Var(X)$.

משתנים בלתי מתואמים:

משתנים בלתי מתואמים הם משתנים שמקדם המתאם שלהם אפס, וכדי שדבר כזה יקרה השונות המשותפת צריכה להתאפס. משתנים בלתי מתואמים הם משתנים שכלל אין ביניהם התאמה לינארית.
משתנים בלתי תלויים הם משתנים שאין ביניהם קשר ולכן גם הם בלתי מתואמים, אך משתנים בלתי מתואמים אינם בהכרח בלתי תלויים.

השפעת טרנספורמצייה לינארית על מקדם המתאם:

$$\rho\left[(aX+b),(cY+d)\right]=\begin{cases}\rho(X,Y)\_\_if\_\_a\cdot c>0\\-\rho(X,Y)\_\_if\_\_a\cdot c<0\end{cases}$$

כלומר, טרנספורמציה לינארית על שני משתנים לא משנה את עוצמת הקשר ביניהם היא עלולה לשנות רק את כיוון הקשר.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נחזור לדוגמה שהוצגה בפרק הקודם:
תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה. כמו כן, נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8, הסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9 והסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75.
יהי X מספר הקורסים שהסטודנט עבר, ויהי Y משתנה אינדיקטור המקבל את הערך 1, אם הסטודנט עבר את הבחינה בכלכלה, ו-0 אחרת.
נחשב את מקדם המתאם:

X/Y	0	1	2	P_Y
0	0.05	0.15	0	0.2
1	0	0.05	0.75	0.8
P_X	0.05	0.2	0.75	1

X	0	1	2
P_X	0.05	0.2	0.75

$$E(X)=\sum_i x_iP(x_i)=\mu=0\cdot0.05+1\cdot0.2+2\cdot0.75=1.7$$

$$V(X)=\sum_i(x_i-\mu)^2P(x_i)=\sum_i x_i^2P(x_i)-\mu^2=0^2\cdot0.05+1^2\cdot0.2+2^2\cdot0.75-1.7^2=0.31=\sigma^2$$

y	P_Y
0	0.2
1	0.8

$$\sigma_x=\sqrt{V(X)}=\sqrt{0.31}=0.557$$

$$E(y)=\sum_i y_iP(y_i)=0+0.8=0.8$$

$$V(y)=\sum_i(y_i-\mu_y)^2P(y_i)=\sum_i y_i^2P(y_i)-\mu_y{}^2=0+0.8-0.8^2=0.16=\sigma_y{}^2$$

$$\sigma_y=\sqrt{0.16}=0.4$$

$$E(xy)=0\cdot 0\cdot 0.05+0\cdot 1\cdot 0+1\cdot 0\cdot 0.15+1\cdot 1\cdot 0.05+2\cdot 0\cdot 0+2\cdot 1\cdot 0.75=1.55$$

$$\text{cov}(x,y)=E(x\cdot y)-E(x)\cdot E(y)=1.55-1.7\cdot 0.8=0.19$$

$$\rho=\frac{\text{cov}(x,y)}{\sigma_x\cdot\sigma_y}=\frac{0.19}{0.557\cdot 0.4}=0.853$$

כל קורס שהסטודנט מסיים מזכה אותו ב-3 נקודות אקדמאיות.
מה יהיה מקדם המתאם בין נקודות הזכות שיצבור למשתנה Y?

שאלות:

1) הסיכוי שסטודנט יעבור את המבחן במועד א' בסטטיסטיקה הוא 0.8. אם הוא נכשל במועד א' הוא ניגש למועד ב' שם הסיכוי לעבור את המבחן מוערך ב-0.9 (סטודנט שעובר את א' לא ניגש לב'). במידה והסטודנט נכשל במועד ב' הוא מגיש בקשה למועד ג' אותה מאשרים בסיכוי של 0.2, והסיכוי שלו לעבור את מועד ג' הוא 0.7.
נגדיר את X להיות מספר המבחנים אליהם ניגש הסטודנט, ונגדיר את Y להיות מספר המבחנים שנכשל בהם.

א. בנו את פונקצית ההסתברות המשותפת ואת פונ' ההסתברות השולית.

ב. האם המשתנים הינם בלתי תלויים?

ג. ידוע שהסטודנט ניגש ליותר ממבחן אחד, מה ההסתברות שהוא נכשל בפחות משלושה מבחנים?

ד. האם המתאם בין X ל- Y מלא או חלקי? חיובי או שלילי? הסבירו ללא חישוב.

ה. חשבו את מקדם המתאם בין X לבין Y.

ו. האם המשתנים הם בלתי מתאומים?

2) נטיל מטבע שלוש פעמים. נגדיר את X להיות מספר העצים המתקבלים בשתי ההטלות הראשונות, ואת Y להיות מספר העצים המתקבלים בשתי ההטלות האחרונות.

א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y ואת פונקציות ההסתברות השוליות.

ב. האם X ו- Y הם משתנים בלתי תלויים?

ג. מהו מקדם המתאם בין X ל- Y. האם המשתנים מתואמים?

ד. אם בשתי ההטלות הראשונות יצא בדיוק עץ אחד, מה ההסתברות שבשתי ההטלות האחרונות יצאו שני עצים?

ה. אם בשתי ההטלות האחרונות יצא לפחות פעם אחת עץ, מה ההסתברות שבשתי ההטלות הראשונות יצא עץ אחד?

3) נפזר שלושה כדורים שונים בשלושה תאים. נגדיר את המשתנים הבאים:
X - מספר הכדורים בתא הראשון.
Y - מספר הכדורים בתא השני.

א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת.

ב. האם המשתנים בלתי מתאומים?

4) קובייה הוגנת הוטלה פעמיים.
יהי X ההטלה הגדולה מבין שתי התוצאות, ויהי Y מסי ההטלות בהן יצאה תוצאה זוגית.

א. מצאו את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו-Y.

ב. חשבו את מקדם המתאם של X ו-Y.

ג. מצאו את ההתפלגות של Y בהינתן ש-$X=2$.

5) בבניין שלנו 5 דירות. דירות מספר אחת ושלוש הן דירות משופצות והשאר אינן.
הוחלט לבחור שתי דירות באקראי מבין הדירות בבניין.
נגדיר את המשתנים הבאים:
X - מספר הדירות המשופצות שנבחרו.
Y - מספר הדירות האי זוגיות שנדגמו.

א. בנו את פונקצית ההסתברות המשותפת ואת פונקציות ההסתברות השולית.

ב. האם המשתנים מתואמים?

ג. מה מקדם המתאם בין X לבין Y?

ד. מה יהיה מקדם המתאם:

i. בין מספר הדירות המשופצות למספר הדירות הזוגיות שנדגמו.

ii. בין מספר הדירות הזוגיות לדירות האי זוגיות שנדגמו.

ה. כל דירה משופצת עולה 2 מיליון ₪ וכל דירה לא משופצת עולה 1.5 מיליון ₪. מה המתאם בין עלות הדירות שנדגמו למספר הדירות הזוגיות?

תשובות סופיות:

1) א. להלן טבלה: ב. תלויים. ג. 0.994 ד. חלקי חיובי .

$x \backslash y$	1	2	3	$P(y)$
0	0.8	0	0	0.8
1	0	0.18	0	0.18
2	0	0.016	0.0028	0.0188
3	0	0	0.0012	0.0012
$P(x)$	0.8	0.196	0.004	1

ה. 0.963. ו. מתואמים.

2) א. להלן טבלה: ב. תלויים. ג. מקדם המתאם : 0.5, מתואמים.

$x \backslash y$	0	1	2	$P(y)$
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{2}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$
$P(x)$	$\frac{2}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{2}{8}$	1

ד. 0.25. ה. 0.5.

3) א. להלן טבלה: ב. מתואמים.

$x \backslash y$	0	1	2	3
0	$\frac{1}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{1}{27}$
1	$\frac{3}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{3}{27}$	0
2	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	0	0
3	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	0	0

4) א. להלן טבלה: ב. 0.252.

$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6
0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{3}{36}$	0	$\frac{5}{36}$	0
1	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{6}{36}$
2	0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{3}{36}$	0	$\frac{5}{36}$

5) א. להלן טבלה: ב. X ו- Y מתואמים. ג. $\frac{2}{3}$.

$x \backslash y$	0	1	2	$P(y)$
0	0.1	0	0	0.1
1	0.2	0.4	0	0.6
2	0	0.2	0.1	0.3
$P(x)$	0.3	0.6	0.1	1

ד. i. $-\frac{2}{3}$. ii. -1. ה. $-\frac{2}{3}$.

סטטיסטיקה א

פרק 33 - המשתנה המקרי הדו ממדי הבדיד - שאלות מסכמות

תוכן העניינים

המשתנה המקרי הדו ממדי הבדיד – שאלות מסכמות:

רקע:

משתנים בלתי תלויים:

יהיו משתנים X ו- Y. הם יהיו משתנים בלתי תלויים אם עבור כל X ו- Y אפשריים מתקיים: $p(x=k, y=l)=p(x=k)\cdot p(y=l)$.

מקדם המתאם:

מגדירים את מקדם המתאם: $\rho=\dfrac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sigma_x\cdot\sigma_y}$.

שונות משותפת:

מגדירים את השונות המשותפת:

$\operatorname{cov}(x,y)=E\left[(x-\mu_x)(y-\mu_y)\right]=E(x\cdot y)-E(x)\cdot E(y)$.

תכונות של השונות המשותפת:

1. $\operatorname{cov}(X,Y)=\operatorname{cov}(Y,X)$.
2. $\operatorname{cov}(X,X)=\operatorname{var}(X)$.
3. $\operatorname{cov}\left[(aX+b),(cY+d)\right]=a\cdot c\cdot\operatorname{cov}(X,Y)$.

משתנים בלתי מתואמים:

משתנים בלתי מתואמים הם משתנים שמקדם המתאם שלהם אפס וכדי שדבר כזה יקרה השונות המשותפת צריכה להתאפס.

השפעת טרנספורמציה לינארית על מקדם המתאם:

$$\rho\left[(aX+b),(cY+d)\right]=\begin{cases}\rho(X,Y) & \text{if} \quad a\cdot c>0\\ -\rho(X,Y) & \text{if} \quad a\cdot c<0\end{cases}$$

תוחלת ושונות של סכום משתנים:

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)\ V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2\cdot\text{cov}(X,Y)$$

קומבינציות לינאריות:

נגדיר קומבינציה ליניארית כללית באופן הבא: $W=(aX+b)+(cY+d)$.
אזי מתקיים:

$$E(W)=E\big((aX+b)+(cY+d)\big)=aE(X)+b+cE(Y)+d$$
$$V(W)=V\big((aX+b)+(cY+d)\big)=a^2V(X)+c^2V(Y)+2\cdot a\cdot c\cdot\text{cov}(X,Y)$$

שאלות:

1) יש ליצור סיסמה בת 3 תווים. כל תו יכול להיבחר רק מתוך כלל התווים הבאים: $A , B , C , 1 , 2$. יהי X מספר הפעמים שהספרה 1 מופיעה בסיסמה, ויהי Y מספר הפעמים שהספרה 1 מופיעה בקצה הסיסמה (שני הקצוות).

א. זהו את ההתפלגויות השוליות של X ו- Y כהתפלגויות מיוחדות.

ב. מצאו את ההתפלגות המשותפת של X ושל Y.

ג. מצאו את מקדם המתאם בין X ל- Y.

ד. מהו המתאם בין $2X$ ל- $3Y+5$?

2) במסיבת סוף שנה ישנו ארגז קרח ובתוכו 7 בקבוקי בירה:
4 "מכבי", 2 "גולדסטאר" ו-1 "טובורג".
קרן לקחה 3 בקבוקי בירה באקראי מתוך ארגז הקרח.
נסמן ב- X את מספר בקבוקי "מכבי" שנלקחו על ידי קרן,
ונסמן ב- Y את מספר בקבוקי "טובורג" שנלקחו על ידי קרן.

א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ושל Y.

ב. חשבו את התוחלת והשונות של X ושל Y.

ג. מצאו את השונות המשותפת של X ושל Y.

ד. נגדיר את W כמספר בקבוקי ה"גולדסטאר" שנלקחו על ידי קרן.
בטאו את W באמצעות X ו- Y, וחשבו את התוחלת והשונות של W על סמך התוצאות שהתקבלו בשני הסעיפים הקודמים בלבד.

ה. מהו מקדם המתאם בין מספר בקבוקי "מכבי" שנלקחו על ידי קרן, למספר בקבוקים שאינם "מכבי" שנלקחו על ידי קרן?

3) במגירה 6 זוגות נעליים. יהודה הוציא מהמגירה 4 נעליים (לא בהכרח זוגות באקראי. נסמן ב- W את מספר זוגות הנעליים שהוציא יהודה, ונסמן ב- R את מספר הנעליים השמאליות שהוציא יהודה.

א. מצא את ההתפלגות המשותפת של המשתנים שהוצגו.

ב. האם המשתנים שהוצגו בלתי תלויים?

ג. מצא את התפלגות מספר הנעליים השמאליות שהוצאו אם בסך הכול הוצא זוג נעלים יחיד על ידי יהודה.

ד. אם ידוע שהוצאו לפחות 3 נעליים שמאליות מה הסיכוי שהוצא לכל היותר זוג אחד?

4) בכד 5 כדורים כחולים, 4 כדורים לבנים ו-3 כדורים ירוקים. בוחרים באקראי וללא החזרה 3 כדורים. נגדיר את המשתנים הבאים:

X - מקבל את הערך 1 אם נבחר לפחות כדור אחד כחול, ו-0 אחרת.

Y - מספר הכדורים הלבנים שנבחרו.

א. חשבו את $P(X=1)$.

ב. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y.

ג. מה התוחלת של Y, אם ידוע שלא הוצאו כדורים כחולים?

ד. מה השונות של X, אם ידוע שהוצא לכל היותר כדור לבן אחד?

5) ביום ההולדת הרביעי של טל הוא מחלק שלושה פרסים שונים באקראי ל-5 ילדים. בכל פעם שטל מחלק פרס הוא בוחר באקראי ילד מתוך ה-5 באופן אקראי ובלתי תלוי בבחירות הקודמות. נגדיר את המשתנים הבאים:

X - מספר הפרסים שקיבלה יוליה.

Y - מספר הילדים שלא קיבלו פרס.

א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת והשוליות של X ו- Y.

ב. האם X ו- Y הם משתנים בלתי מתואמים?

ג. מצאו את התוחלת של $X\cdot Y^2$.

ד. מה מקדם המתאם בין מספר הפרסים שקיבלה יוליה, למספר הילדים שקיבלו פרס?

6) קבעו אילו מהטענות הבאות נכונות. נמקו.

א. אם שני משתנים הם מתואמים, אזי הם תלויים.

ב. אם שני משתנים הם תלויים, אזי הם מתואמים.

ג. אם שני משתנים הם בלתי תלויים, אזי הם בלתי מתואמים.

ד. אם שני משתנים הם בלתי מתואמים, אזי הם בלתי תלויים.

7) במקום עבודה 50 עובדים מתוכם 25 גברים ו-25 נשים. כל עובד נתבקש לבחור מתנה לחג. לכל עובד מוצגות 5 אופציות, מתוכן הוא צריך לבחור אחת. העובדים בוחרים מתנה באקראי ובאופן בלתי תלוי זה בזה.

נסמן X_i - מספר הגברים שבחרו במתנה i.

נסמן Y_i - מספר הנשים שבחרו במתנה i.

א. האם X_1 ו-Y_1 הם משתנים בלתי תלויים? אין צורך לחשב רק להסביר.

ב. האם X_1 ו-X_2 הם משתנים בלתי תלויים? אין צורך לחשב רק להסביר.

ג. מהי ההתפלגות של X_1+X_2 ?

ד. האם המתאם בין X_1 ו- X_2 מלא או חלקי? חיובי או שלילי? אין צורך לחשב רק להסביר.

8) הוכיחו את הזהות הבאה עבור שלושת המשתנים: X, Y ו- Z:
$\operatorname{cov}(X+Y,Z)=\operatorname{cov}(X,Z)+\operatorname{cov}(Y,Z)$.

9) מספר העלים שנושרים בסתיו מהעץ בגינה מתפלג פואסונית עם תוחלת של 50 עלים בדקה. נסמן ב- Y את מספר העלים שנושרים מהעץ בין 12:00 ל-12:10, ונסמן ב- Q את מספר העלים שנושרים בין 12:05 ל-12:30.

א. חשבו את: $\operatorname{cov}(4Y,Q+6)$.

ב. מה המתאם בין Y ל- Q?

10) בסל יש 20 כדורים אדומים, 20 ירוקים ו-20 כחולים. מוציאים באקראי מהסל 20 כדורים. מצאו את מקדם המתאם בין מספר הכדורים האדומים שהוצאו למספר הכדורים הירוקים שהוצאו.

11) נתון ש: $Y\sim B(1,p)$ כאשר $0<P<1$.
הוכיחו שאם מתקיים: $P(X=x|Y=0)=P(X=x|Y=1)$ לכל X,
אז X ו- Y הם משתנים בלתי תלויים.

12) נתון ש- $X\sim B(n,p)$ וכן: $Y\sim B(m,p)$, שאינם תלויים זה בזה.
הוכיחו שמתקיים: $X\,|\,X+Y=k\sim HG(n+m,n,k)$.

תשובות סופיות:

1) א. $X \sim B\left(3,\frac{1}{5}\right)$, $Y \sim B\left(2,\frac{1}{5}\right)$.

ב. להלן טבלה: ג. 0.816. ד. 0.816.

X/Y	0	1	2	3	P_Y
0	$\frac{64}{125}$	$\frac{16}{125}$	0	0	$\frac{80}{125}$
1	0	$\frac{32}{125}$	$\frac{8}{125}$	0	$\frac{40}{125}$
2	0	0	$\frac{4}{125}$	$\frac{1}{125}$	$\frac{5}{125}$
P_X	$\frac{64}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{1}{125}$	1

2) א. להלן טבלה: ב. $V(Y)=\frac{12}{49}$, $E(Y)=\frac{3}{7}$, $V(X)=\frac{24}{49}$, $E(X)=\frac{12}{7}$.

X/Y	0	1	2	3	P_Y
0	0	$\frac{3}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{20}{35}$
1	$\frac{1}{35}$	$\frac{8}{35}$	$\frac{6}{35}$	0	$\frac{15}{35}$
P_X	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$	1

ג. $-\frac{8}{49}$. ד. $V(W)=\frac{20}{49}$, $E(W)=\frac{6}{7}$. ה. 1-.

3) א. להלן טבלה: ב. המשתנים תלויים.

R/W	0	1	2	P_R
0	$\frac{15}{495}$	0	0	$\frac{15}{495}$
1	$\frac{60}{495}$	$\frac{60}{495}$	0	$\frac{120}{495}$
2	$\frac{90}{495}$	$\frac{120}{495}$	$\frac{15}{495}$	$\frac{225}{495}$
3	$\frac{60}{495}$	$\frac{60}{495}$	0	$\frac{120}{495}$
4	$\frac{15}{495}$	0	0	$\frac{15}{495}$
P_W	$\frac{240}{495}$	$\frac{240}{495}$	$\frac{15}{495}$	1

ג. להלן טבלה:

$R/w=1$	1	2	3
$P(R/w=1)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

ד. 1.

4) א. $\frac{185}{220}$.   ב. להלן טבלה: ג. 1.714.   ד. 0.071.

X/Y	0	1	P_Y
0	$\frac{1}{220}$	$\frac{55}{220}$	$\frac{56}{220}$
1	$\frac{12}{220}$	$\frac{100}{220}$	$\frac{112}{220}$
2	$\frac{18}{220}$	$\frac{30}{220}$	$\frac{48}{220}$
3	$\frac{4}{220}$	0	$\frac{4}{220}$
P_X	$\frac{35}{220}$	$\frac{185}{220}$	1

5) א. להלן טבלה: ב. X ו-Y בלתי מתואמים.

X/Y	0	1	2	3	P_Y
2	$\frac{24}{125}$	$\frac{36}{125}$	0	0	$\frac{60}{125}$
3	$\frac{36}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{12}{125}$	0	$\frac{60}{125}$
4	$\frac{4}{125}$	0	0	$\frac{1}{125}$	$\frac{5}{125}$
P_X	$\frac{64}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{1}{125}$	1

ג. 4.128.   ד. 0.

6) א. נכון.   ב. לא נכון.   ג. נכון.   ד. לא נכון.

7) א. בלתי תלויים. ב. תלויים. ג. $x_1+x_2 \sim B\left(n=25, p=\frac{2}{5}\right)$.
ד. חלקי ושלילי.

8) שאלת הוכחה.

9) א. 1000. ב. 0.316.

10) -0.5.

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

סטטיסטיקה א

פרק 34 - המשתנה המקרי הדו ממדי - קומבינציות ליניאריות

תוכן העניינים

המשתנה המקרי הדו מימדי – קומבינציות לינאריות:

רקע:

יהיו שני משתנים מקריים X ו- Y.

התוחלת והשונות של סכומם היא:

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$
$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2\cdot\operatorname{cov}(X,Y)$$

התוחלת והשונות של הפרשם היא:

$$E(X-Y)=E(X)-E(Y)$$
$$V(X-Y)=V(X)+V(Y)-2\cdot\operatorname{cov}(X,Y)$$

קומבינציה ליניארית:

יוצרים משתנה חדש שהוא קומבינציה לינארית של שני משתנים אחרים:
$W=(aX+b)+(cY+d)$. אזי:

$$\operatorname{cov}\left[(aX+b),(cY+d)\right]=a\cdot c\cdot\operatorname{cov}(X,Y)$$
$$E(W)=E\left((aX+b)+(cY+d)\right)=aE(X)+b+cE(Y)+d$$
$$V(W)=V\left((aX+b)+(cY+d)\right)=a^2V(X)+c^2V(Y)+2\cdot a\cdot c\cdot\operatorname{cov}(X,Y)$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נתונים שני משתנים מקריים X ו- Y המקיימים:
$\mu_X=80$, $\sigma_X=15$, $\mu_Y=70$, $\sigma_Y=20$, $\operatorname{cov}(X,Y)=200$

א. מצאו את התוחלת והשונות של סכום המשתנים.

ב. מצאו את התוחלת והשונות של X ו- Y.

ג. מצאו את השונות ומה התוחלת של המשתנה $W=2X+3Y$.

שאלות:

1) נתונה פונקציית ההסתברות המשותפת הבאה:

Y/X	1	2	3	$P(X)$
2		0.1	0.3	0.6
3	0.2		0.1	
$P(X)$				

א. השלימו את ההסתברויות החסרות.
ב. האם המשתנים תלויים?
ג. האם המשתנים בלתי מתואמים?
ד. חשבו את השונות המשותפת.
ה. חשבו את התוחלת והשונות של סכום המשתנים.
ו. חשבו את התוחלת והשונות של הפרש המשתנים.

2) מבחן בנוי מחלק כמותי וחלק מילולי. תוחלת הציון בחלק הכמותי היא 100, עם סטיית תקן 20. תוחלת הציונים בחלק המילולי היא 90 עם סטיית תקן 15. מקדם המתאם בין הציון הכמותי לציון המילולי הוא 0.8.
א. חשבו את השונות המשותפת בין הציון הכמותי לציון המילולי.
ב. חשבו את התוחלת והשונות של סכום הציונים בחלק הכמותי ובחלק המילולי.
ג. חשבו את התוחלת והשונות של הפרש הציונים בין החלק הכמותי לחלק המילולי.
ד. עלות הבחינה 2000 שקלים. הוחלט לזכות שקל עבור כל נקודה שנצברה בחלק המילולי ושני שקלים עבור כל נקודה שנצברה בחלק הכמותי. מהי התוחלת ומהי השונות של עלות הבחינה נטו (העלות לאחר הזיכוי)?

3) נתון: $\text{var}(X-2Y)=2$, $\text{var}(X+2Y)=3$.
חשבו: $\text{cov}(X,Y)$.

4) מטילים קובייה n פעמים. נגדיר את המשתנים הבאים:
X = מספר הפעמים שהתקבלה התוצאה 6.
Y = מספר הפעמים שהתקבלה התוצאה 5
בטאו את השונות המשותפת באמצעות n.

תשובות סופיות:

1) א. להלן טבלה: ב. תלויים. ג. מתואמים. ד. -0.1.

$x\backslash y$	1	2	3	$P(y)$
2	0.2	0.1	0.3	0.6
3	0.2	0.1	0.1	0.4
$P(x)$	0.4	0.2	0.4	1

ה. תוחלת: 4.4, שונות: 0.84. ו. תוחלת: -0.4, שונות: 1.24.

2) א. 240. ב. תוחלת: 190, שונות: 1105.

ג. תוחלת: 10 , שונות: 145 ד. תוחלת: 1710, שונות: 2785.

3) -0.125.

4) $-\frac{n}{36}$.

סטטיסטיקה א

פרק 35 - קומבינציות ליניאריות על התפלגות נורמלית

תוכן העניינים

קומבינציות ליניאריות על התפלגות נורמלית:

רקע:

כל קומבינציה ליניארית של משתנים המתפלגים נורמאלית – מתפלגת נורמאלית בעצמה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

הגובה של גברים במדינת ישראל מתפלג נורמלית עם תוחלת של 175 ס״מ וסטיית תקן של 10 ס״מ, וגובהן של הנשים במדינה מתפלג נורמלית עם תוחלת של 165 ס״מ וסטיית תקן של 8 ס״מ.
מה הסיכוי שגבר אקראי במדינה יהיה גבוה מאישה אקראית?

שאלות:

1) המשקל של גברים במדינת ישראל מתפלג נורמלית עם תוחלת של 75 ק״ג וסטיית תקן של 10 ק״ג, והמשקל של נשים במדינה מתפלג נורמלית עם תוחלת של 65 ק״ג וסטיית תקן של 8 ק״ג.
מה הסיכוי שאישה אקראית תהיה בעלת משקל גבוה יותר מגבר אקראי?

2) ההוצאה השנתית על ביגוד לאדם מתפלגת נורמלית עם תוחלת של 3000 ₪ וסטיית תקן של 1000 ₪. ההוצאה השנתית על בילויים מתפלגת נורמלית עם תוחלת של 4000 ₪ וסטיית תקן של 1500 ₪. מקדם המתאם בין ההוצאה השנתית על ביגוד וההוצאה השנתית על בילויים הינו 0.6.
א. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של התפלגות ההוצאה השנתית הכוללת על ביגוד ובילוי?
ב. מה הסיכוי שההוצאה השנתית הכוללת על ביגוד ובילוי תעלה על 8000 ₪?
ג. מהו העשירון העליון של ההוצאה השנתית הכוללת על ביגוד ובילוי?

3) צריכת הירקות היומית במסעדה מתפלג נורמלית עם תוחלת של 50 ק״ג וסטיית תקן של 4 ק״ג. נתון שמחיר ק״ג ירק הוא 6 ₪ לקילו.
א. מה התוחלת ומהי השונות של העלות היומית של ירקות למסעדה?
ב. מה ההסתברות שהעלות היומית על ירקות תהיה נמוכה מ-290 ₪?
ג. מהו האחוזון ה-40 של התפלגות העלות היומית של המסעדה על ירקות?

4) נפח יין בבקבוק מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 750 מ״ל וסטיית תקן של 20 מ״ל. אדם קנה מארז של 4 בקבוקי יין.
א. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של נפח היין במארז.
ב. את היין שבמארז האדם מזג לכלי שקיבולתו 3.1 ליטר.
מה ההסתברות שהיין יגלוש מהכלי?

5) לדוד משה הייתה חווה. בחווה פרה ועיזה. תנובת החלב של הפרה מתפלג נורמאלית עם ממוצע של 20 ליטר ביום וסטיית תקן של 5 ליטר ותנובת החלב של העזה מתפלג גם כן נורמאלית עם ממוצע של 10 ליטר וסטיית תקן של 2 ליטר. כל ליטר חלב פרה נמכר ב-2 ₪ וליטר חלב עזה נמכר ב-3 ₪.
א. מה הסיכוי שהפדיון היומי של דוד משה מחלב יהיה לפחות62 ₪?
ב. מה הסיכוי שמתוך 5 ימים יהיו לפחות 4 ימים בהם תנובת החלב מהפרה והעזה ביחד תהיה מתחת ל-30 ליטר?
מה הסיכוי שביום מסוים תנובת הפרה תהיה נמוכה מתנובת העזה?

תשובות סופיות:

1) 0.2177.
2) א. תוחלת: 7000, סטיית תקן: 2247.   ב. 0.3264.   ג. 9881.
3) א. תוחלת: 300, שונות: 576.   ב. 0.3372.   ג. 294.
4) א. תוחלת: 3000 מ"ל, סטיית תקן: 40 מ"ל.   ב. 0.0062.
5) א. 0.7549.   ב. 0.1875.   ג. 0.0314.

סטטיסטיקה א

פרק 36 - התפלגות הדגימה ומשפט הגבול המרכזי

תוכן העניינים

התפלגות ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי:

רקע:

בפרק זה נדון בהתפלגות של ממוצע המדגם: $\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}$.

מכיוון שממדגם למדגם אנו יכולים לקבל ממוצע מדגם שונה, אזי ממוצע המדגם הוא משתנה מקרי ויש לו התפלגות.

גדלים המתארים התפלגות כלשהי או אוכלוסייה כלשהי נקראים פרמטרים.

להלן רשימה של פרמטרים החשובים לפרק זה:

ממוצע האוכלוסייה נסמן ב- μ (נקרא גם תוחלת).

שונות אוכלוסייה נסמן ב- σ^2.

סטיית תקן של אוכלוסייה: σ.

תכונות התפלגות:

ממוצע כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לממוצע האוכלוסייה: $E(\bar{x})=\mu_{\bar{x}}=\mu$.

שונות כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לשונות האוכלוסייה מחולק ב- n.

תכונה זו נכונה רק במדגם מקרי: $V(\bar{x})=\sigma_{\bar{x}}^2=\frac{\sigma^2}{n}$.

יש יחס הפוך בין גודל המדגם לבין שונות ממוצעי המדגם.

אם נוציא שורש לשונות נקבל סטיית תקן של ממוצע המדגם שנקראת גם

טעות תקן: $\sigma(\bar{x})=\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

השכר הממוצע במשק הינו 9000 ₪ עם סטיית תקן של 4000. דגמו באקראי 25 עובדים.

א. מיהי אוכלוסיית המחקר? מהו המשתנה הנחקר?
ב. מהם הפרמטרים של האוכלוסייה?
ג. מה התוחלת ומהי סטית התקן של ממוצע המדגם?

דגימה מהתפלגות נורמאלית:

אם נדגום מתוך אוכלוסייה שהמשתנה בה מתפלג נורמאלית עם ממוצע μ ושונות σ^2.

ממוצע המדגם גם יתפלג נורמאלית: $Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma}$, $\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם.
מה ההסתברות שבמדגם של 4 תינוקות אקראיים בעת הולדתם המשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-3.5 ק״ג?

משפט הגבול המרכזי:

אם אוכלוסייה מתפלגת כלשהו עם ממוצע μ ושונות σ^2 אזי עבור מדגם מספיק גדול $(n \geq 30)$ ממוצע המדגם מתפלג בקירוב נורמאלי: $\bar{x} \sim\succ N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משקל חפיסת שוקולד בקו ייצור מתפלג עם ממוצע 100 גרם וסטיית תקן של 4 גרם.
דגמו מקו הייצור 36 חפיסות שוקולד אקראיות.
מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של חפיסות השוקולד שנדגמו יהיה מתחת ל-102 גרם?

שאלות:

1) מתוך כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א נדגמו שני סטודנטים. נתון שממוצע הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.
א. מיהי האוכלוסייה?
ב. מה המשתנה?
ג. מהם הפרמטרים?
ד. מהו גודל המדגם?
ה. מהו תוחלת ממוצע המדגם?
ו. מהי טעות התקן?

2) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה למשפחה בישוב מסוים:

מספר המשפחות	מספר מקלטים
500	0
2500	1
3500	2
3000	3
500	4
סך הכול $N=10000$	

א. בנו את פונקציית ההסתברות של X.
ב. חשבו את התוחלת, השונות וסטיית התקן של X.
ג. אם נדגום 4 משפחות מהישוב עם החזרה מה תהיה התוחלת, מהי השונות ומהי סטיית התקן של ממוצע המדגם?

3) אם נטיל קובייה פעמיים ונתבונן בממוצע התוצאות שיתקבלו, מה תהיה התוחלת ומה תהיה סטיית התקן של ממוצע זה?

4) משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם.
א. מה ההסתברות שתינוק אקראי בעת הלידה ישקול פחות מ-3800 גרם?

נתון כי ביום מסוים נולדו 4 תינוקות.
ב. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע שלהם יעלה על 4 ק"ג?
ג. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-2.5 ק"ג?
ד. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה רחוק מהתוחלת בלא יותר מ-50 גרם?
ה. הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם היה מדובר על יותר מ-4 תינוקות?

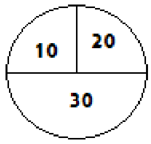
5) הגובה של המתגייסים לצה״ל מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 175 ס״מ וסטיית תקן של 10 ס״מ. ביום מסוים התגייסו 16 חיילים.
   א. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה לפחות 190 ס״מ?
   ב. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה בדיוק 180 ס״מ?
   ג. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יסטה מתחולת הגבהים בפחות מ-5 ס״מ?
   ד. מהו הגובה שבהסתברות של 90% הגובה הממוצע של המדגם יהיה נמוך ממנו?

6) הזמן הממוצע שלוקח לאדם להגיע לעבודתו 30 דקות עם שונות של 16 דקות רבועות. האדם נוסע לעבודה במשך שבוע 5 פעמים.
לצורך הפתרון הניחו שזמן הנסיעה לעבודה מתפלג נורמאלית.
   א. מה ההסתברות שבמשך שבוע משך הנסיעה הממוצע יהיה מעל 33 דקות?
   ב. מהו הזמן שבהסתברות של 90% ממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה גבוה ממנו?
   ג. מה ההסתברות שממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה מרוחק מ-30 דקות בלפחות 2 דקות?
   ד. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם האדם היה נוסע לעבודה 6 פעמים בשבוע?

7) נפח היין בבקבוק מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 750 סמ״ק וסטיית תקן של 10 סמ״ק.
   א. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה בדיוק 755 סמ״ק?
   ב. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה יותר מ-755 סמ״ק?
   ג. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה לפחות 755 סמ״ק?
   ד. בקבוקיי היין שבארגז נמזגים לקערה עם קיבולת של שלושה ליטר. מה ההסתברות שהיין יגלוש מהקערה?

8) משתנה מתפלג נורמאלית עם תוחלת 80 וסטיית תקן 4.
   א. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה כאשר גודל המדגם הוא 9?
   ב. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה שגודל המדגם הוא 16?
   ג. הסבר את ההבדל בתשובות של שני הסעיפים.

9) בקזינו ישנה רולטה. על הרולטה רשומים המס' הבאים כמוראה בשרטוט:



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של סכום הזכייה במשחק בודד.

ב. מה התוחלת ומה השונות של סכום הזכייה?

ג. אם האדם ישחק את המשחק 5 פעמים מה התוחלת ומה השונות של ממוצע סכום הזכייה בחמשת המשחקים?

ד. אם האדם משחק את המשחק 50 פעם מה ההסתברות שבסה"כ יזכה ב-1050 ₪ ומעלה?

10) לפי הערכות הלשכה המרכזית לסטטיסטיקה השכר הממוצע במשק הוא 8000 ₪ עם סטיית תקן של 3000 ₪.
מה ההסתברות שבמדגם מקרי של 100 עובדים השכר הממוצע יהיה יותר מ-8500 ₪?

11) קובייה הוטלה 50 פעמים.
מה ההסתברות שהממוצע של התוצאות יהיה לפחות 3.72?

12) אורך צינור שמפעל מייצר הינו עם ממוצע של 70 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ.

א. נלקחו באקראי 100 מוטות, מה ההסתברות שממוצע אורך המוטות יהיה בין 68 ל 78 ס"מ?

ב. יש לחבר 2 בניינים באמצעות מוטות. המרחק בין שני הבניינים הינו 7200 ס"מ. מה ההסתברות ש-100 המוטות יספיקו למלאכה?

ג. מה צריך להיות גודל המדגם המינימאלי, כדי שבהסתברות של 5% ממוצע המדגם יהיה קטן מ-69 ס"מ. היעזרו במשפט הגבול המרכזי.

13) נתון משתנה מקרי בדיד בעל פונקציית ההסתברות הבאה:

X	8	6	4	2
$P(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

מתוך התפלגות זו נלקח מדגם מקרי בגודל 50.
מה הסיכוי שממוצע המדגם יהיה קטן מ-5?

14) נתון ש- $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$. דגמו 5 תצפיות מאותה התפלגות והתבוננו בממוצע המדגם $\bar{X}$. לכן: $P\left(\bar{X} > \mu\right)$ יהיה (בחרו בתשובה הנכונה):

א. 0.
ב. 0.5.
ג. 1.
ד. לא ניתן לדעת.

15) נתון ש- X מתפלג כלשהו עם תוחלת: μ ושונות σ^2.
החליטו לבצע מדגם בגודל 200 מתוך ההפלגות הנתונה לפי משפט הגבול המרכזי מתקיים (בחרו בתשובה הנכונה):

א. $X \sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{200}\right)$.
ב. $\mu \sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{200}\right)$.
ג. $\bar{X} \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$.
ד. $\bar{X} \sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{200}\right)$.

16) נתון ש- $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$. אם נדגום n תצפיות מתוך ההתפלגות ונגדיר: $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$,
אזי (בחרו בתשובה הנכונה):

א. μ ו- $\bar{X}$ יהיו משתנים מקריים.
ב. μ יהיה משתנה מקרי ו- $\bar{X}$ קבוע.
ג. $\bar{X}$ יהיה משתנה מקרי ו- μ קבוע.
ד. μ ו- $\bar{X}$ יהיו קבועים.

17) משקל חפיסת שוקולד בקו ייצור מתפלג עם ממוצע 100 גרם. החפיסות נארזות בקרטון המכיל 36 חפיסות שוקולד אקראיות. ההסתברות שהמשקל הממוצע של חפיסות השוקולד בקרטון יהיה מעל 99 גרם הוא 0.9932.

א. מהי סטיית התקן של משקל חפיסת שוקולד בודדת?
ב. מה הסיכוי שמתוך 4 קרטונים בדיוק קרטון אחד יהיה עם משקל ממוצע לחפיסה הנמוך מ-100 גרם?

18) משתנה מקרי כלשהו מתפלג עם סטיית תקן של 20.
מה הסיכוי שאם נדגום 100 תצפיות בלתי תלויות מאותה התפלגות אזי ממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בפחות מ-2?

19) מספר המכוניות הנכנסות לחניון "בציר" במשך היום מתפלג פואסונית עם קצב של מכונית אחת לדקה. שומר מסר נתונים על מספר המכוניות שנכנסות בכל שעה לגבי 40 שעות שאסף נתונים.
מה ההסתברות שממוצע מספר המכוניות שנכנסו לחניון לשעה בשעות אלה יהיה לפחות 63?

20) הוכיחו שאם משתנה מתפלג כלשהו עם תוחלת μ ושונות σ^2, ומבצעים מדגם בגודל n של תצפיות בלתי תלויות מהמשתנה, אזי מתקיימות התכונות הבאות לגבי ממוצע המדגם: $E(\bar{x})=\mu$ ו- $V(\bar{x})=\frac{\sigma^2}{n}$.

תשובות סופיות:

1) א. כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א. ב. ציון.
ג. ממוצע: 78, סטיית תקן: 15. ד. 2.
ה. 78. ו. 10.6.

2) א. להלן טבלה:

X	0	1	2	3	4
$P(X)$	0.05	0.25	0.35	0.3	0.05

ב. $\mu = 2.05$, $\sigma^2 = 0.9475$, $\sigma = 0.973$

ג. $\mu_{\bar{x}} = 2.05$, $\sigma^2_{\bar{x}} = 0.2369$, $\sigma(\bar{X}) = 0.486$

3) $\mu_{\bar{x}} = 3.5$, $\sigma(\bar{X}) = 1.21$.

4) א. 0.8413. ב. 0.0013. ג. 0. ד. 0.1974.

5) א. 0. ב. 0. ג. 0.9544. ד. 178.205.

6) א. 0.0465. ב. 27.71. ג. 0.2628. ד. התשובה הייתה קטנה.

7) א. 0. ב. 0.1587. ג. 0.1587. ד. 0.5.

8) א. 0.5468. ב. 0.6826.

9) א. להלן טבלה: ב. התוחלת: 22.5, השונות: 68.75.

X	10	20	30
$P(X)$	0.25	0.25	0.5

ג. התוחלת: 22.5, השונות: 13.75. ד. 0.8997.

10) 0.0475.

11) 0.1814.

12) א. 0.9772. ב. 0.0228. ג. 271.

13) 0.5.

14) ב'.

15) ד'.

16) ג'.

17) א. 2.429. ב. 0.25.

18) 0.6826.

19) 0.0071.

20) שאלת הוכחה.

התפלגות סכום תצפיות בלתי תלויות ומשפט הגבול המרכזי:

רקע:

כעת נדון בסטטיסטי המבטא את סכום התצפיות במדגם: $T=\sum_{i=1}^{n} X_i$.

כאשר כל התצפיות נדגמו באקראי מאותה אוכלוסייה, כלומר, היו: $X_1,...,X_n$ -

משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי התפלגות זהה שתוחלתה μ ושונותה σ^2 אזי:

התוחלת והשונות של סכום התצפיות: $E(T)=n\mu \ , \ V(T)=n\sigma^2$.

דגימה מתוך התפלגות נורמלית:

אם: $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, אזי: $Z=\frac{T-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$, $T\sim N(n\mu,n\sigma^2)$.

משפט הגבול המרכזי:

אם X מתפלג כלשהו וידוע כי: $E(X)=\mu \ , V(X)=\sigma^2$,

אזי עבור מדגם מספיק גדול (לפחות 30): $T \stackrel{\sim}{\succ} N(n\mu,n\sigma^2)$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בעיר מסוימת המשכורת הממוצעת של עובד הינה 8000 ₪. עם סטיית תקן של 2000 ₪.
נדגמו 100 עובדים מהעיר שמפקידים את משכורותיהם לסניף בנק.

1. מה התוחלת וסטיית התקן של סך המשכורות שיופקדו לסניף הבנק על ידי העובדים הללו?
2. מה ההסתברות שלסניף יופקד פחות מ-780 אלף ₪ ע"י אותם עובדים?

GOOL בשביל התירגול

שאלות:

1) המשקל באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 60 ק״ג וסטיית תקן של 10 ק״ג.

א. מה הסיכוי שאדם אקראי מהאוכלוסייה ישקול מתחת ל-65 ק״ג?

ב. מה הסיכוי שהמשקל הממוצע של 4 אנשים אקראיים יהיה מתחת ל-65 ק״ג?

ג. מה הסיכוי שהמשקל הכולל של 4 אנשים אקראיים יהיה מתחת ל-240 ק״ג?

2) נפח יין בבקבוק מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 750 מ״ל וסטיית תקן של 20 מ״ל. אדם קנה מארז של 4 בקבוקי יין.

א. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של נפח היין במארז?

ב. את היין שבמארז האדם מזג לכלי שקיבולתו 3.1 ליטר.
מה ההסתברות שהיין יגלוש מהכלי?

ג. אם לא היה נתון שנפח היין מתפלג נורמאלית. האם התשובה לסעיף א׳ הייתה משתנה? האם התשובה לסעיף ב׳ הייתה משתנה?

3) בספר כלשהו 500 עמודים. קצב הקריאה הממוצע הוא עמוד אחד ב-4 דקות עם סטיית תקן של 1 דקות.

א. מה ההסתברות לסיים את הפרק הראשון (40 עמודים) תוך שעתיים וחצי?

ב. מהו האחוזון ה-95 לזמן סיום קריאת הספר?

4) במגדל נבנו 40 יחידות דיור. כמו כן נבנו 135 מקומות חנייה לבניין.
להלן פונקציית ההסתברות של מספר המכוניות ליחידת דיור:

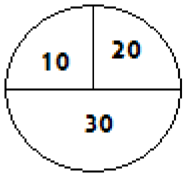
x	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	0.1	0.2	0.3	0.25	0.15

נניח שמספר המכוניות ליחידת דיור בלתי תלויות זו בזו ועם אותה פונקציית הסתברות לכל יחידת דיור (אין צורך בתיקון רציפות).

א. מהי ההסתברות שיהיה מקום בחניון המגדל לכל מכוניות הבניין?

ב. בהינתן ויש מקום במגדל לכל המכוניות, מה הסיכוי שבפועל מספר המכוניות נמוך מ-130?

5) בקזינו ישנה רולטה עליה מסומנים המספרים הבאים:



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום.

א. אם האדם משחק 50 פעמים, מה ההסתברות שבסך הכול יזכה בסכום של 1050 ₪ ומעלה?

ב. האדם מגיע בכל יום לקזינו ומשחק 50 פעם, עד אשר מגיע היום בו הוא יזכה ב-1050 ₪ ומעלה. מה התוחלת ומהי השונות של מספר הימים שיבלה בקזינו?

6) נתון ש- $X_i \sim \exp(\lambda=1)$, כאשר: $i=1,2...100$.

חשבו את הסיכוי: $P\left(\sum_i X_i \geq 115\right)$.

7) אורך חיי סוללה (בשעות) הוא בעל פונקציית הצפיפות הבאה: $0<x<1$, $f(x)=2x$. ברגע שסוללה מתרוקנת מחליפים אותה במיידית בסוללה אחרת. כמה סוללות יש להחזיק במלאי אם רוצים שבסיכוי של 90% לפחות המלאי יספיק עבור 35 שעות לפחות?

תשובות סופיות:

1) א. 0.6915. ב. 0.8413. ג. 0.5.

2) א. תוחלת: 3000 מ"ל, סטיית תקן: 40 מ"ל. ב. 0.0062.
ג. סעיף א' - לא משתנה, סעיף ב' - לא פתיר, התבסס על התפלגות נורמלית.

3) א. 0.0571. ב. 2036.8.

4) א. 0.883. ב. 0.7949.

5) א. 0.8997. ב. תוחלת 1.111, שונות 0.1239.

6) 0.0668.

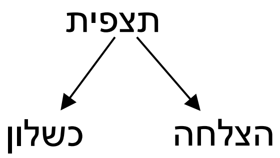
7) 56.

התפלגות מספר ההצלחות במדגם – קירוב נורמלי להתפלגות הבינומית:

רקע:

תזכורת על התפלגות בינומית:

בפרק זה נדון בהתפלגות מספר ההצלחות במדגם אקראי (תצפיות בלתי תלויות זו בזו).
את מספר ההצלחות במדגם נסמן ב- Y.
מחלקים כל תצפית במדגם להצלחה או כישלון.



כעת מה שמשתנה מתצפית לתצפית הוא משתנה דיכוטומי (משתנה שיש לו שני ערכים).
הסיכוי להצלחה יסומן עם הפרמטר p וכישלון יסומן ע"י הפרמטר: $q=1-p$.
מבצעים מדגם אקראי בגודל n: $Y \sim B(n,p)$.

פונקציית ההסתברות של ההתפלגות הבינומית היא: $p(y=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$,

תוחלת: $E(y)=np$.

שונות: $V(y)=npq$.

קירוב נורמלי עבור התפלגות בינומית:

אם לפנינו התפלגות בינומית: $Y \sim B(n,p)$, ומתקיים ש:

1. $n \cdot p \geq 5$.
2. $n \cdot (1-p) \geq 5$.

$$y \sim\succ N(np, npq)$$

אז: $Z_y = \dfrac{y-np}{\sqrt{npq}}$.

תיקון רציפות:

כאשר משתמשים בקירוב הנורמלי להתפלגות הבינומית יש לבצע תיקון רציפות.
הסיבה שעוברים כאן מהתפלגות בדידה להתפלגות נורמלית שהיא התפלגות רציפה.
על פי הכללים הבאים:

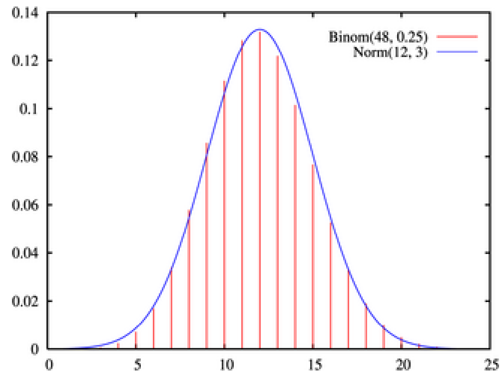
1. $p(Y=a)\cong p\left(a-\frac{1}{2}\le Y\le a+\frac{1}{2}\right)$.
2. $P(Y\le a)\cong P(Y\le a+0.5)$.
3. $P(Y\ge a)\cong P(Y\ge a-0.5)$.

הערות:

- התנאים למעבר מבינומי לנורמלי הם נזילים, כלומר משתנים ממרצה אחד לשני. התנאי שהצגתי כאן הוא הפופולרי ביותר:
  1. $n\cdot p\ge 5$.
  2. $n\cdot(1-p)\ge 5$.
- ישנם מרצים שנותנים את התנאי המחמיר הבא:
  1. $n\cdot p\ge 10$.
  2. $n\cdot(1-p)\ge 10$.
- וישנם מרצים שהתנאי שהם נותנים הוא: $(n\ge 30)$.
- תאלצו לבדוק מהו התנאי שנתנו לכם בכיתה כדי לעבור מהתפלגות בינומית לנורמלית.
- הערה נוספת היא לגבי תיקון רציפות. ישנם מרצים שלא מחייבים לבצע תיקון רציפות שהמדגמים גדולים (בדרך כלל מעל 100 תצפיות) בפתרונות שאציג תמיד אבצע תיקון רציפות במעבר מבינומי לנורמלי כיוון שכך הפתרון יהיה יותר מדויק (בכל מקרה שהמדגמים גדולים העניין זניח).

דוגמה (הפתרון בהקלטה):
נתון שבקרב אוכלוסיית הנוער 25% זקוקים למשקפיים. נדגמו באקראי 48 בני נוער.

1. מה הסיכוי שבדיוק 14 מתוכם יהיו זקוקים למשקפיים?
2. מה הסיכוי שלכל היותר 13 מתוכם זקוקים למשקפיים?



שאלות:

1) נתון ש-20% מאוכלוסייה מסוימת אקדמאית. נבחרו באקראי 10 אנשים באותה אוכלוסייה.
   א. מה ההסתברות ששלושה מהם אקדמאים?
   ב. מה ההסתברות שלכל היותר אחד מהם אקדמאי?
   ג. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר האקדמאים במדגם?

2) במפעל 10% מהמוצרים פגומים. נלקחו 100 מוצרים באקראי מקו הייצור.
   א. מה ההסתברות שנדגמו לפחות 6 מוצרים פגומים?
   ב. מה ההסתברות שמספר המוצרים הפגומים יהיה לכל היותר 11 במדגם?

3) ציוני פסיכומטרי בקרב הנרשמים למוסד מסוים מתפלגים נורמאלית עם ממוצע 500 וסטיית תקן 100. למוסד מסוים הוחלט לקבל אך ורק סטודנטים שקיבלנו מעל 600 בפסיכומטרי. 100 סטודנטים אקראיים נרשמו למוסד. מה ההסתברות שלפחות 20 יתקבלו?

4) מטילים מטבע 50 פעמים.
   א. מה ההסתברות לקבל לכל היותר 30 עצים?
   ב. מה ההסתברות לקבל 28 עצים לפי התפלגות הבינומית ולפי הקירוב הנורמאלי?

5) במטוס מקום ל-400 נוסעים. נרשמו לטיסה 430 אנשים (overbooking). מנתונים סטטיסטיים ידוע שהסיכוי שאדם שנרשם לטיסה אכן יגיע הוא 0.9.
   א. מה ההסתברות שלא יהיו מקומות ישיבה לכל האנשים שהגיעו לטיסה?
   ב. מה צריך להיות גודל המטוס כדי שבסיכוי שלפחות 95% המטוס יספיק לכמות הנרשמים?

6) מפעל לייצור ארטיקים טוען שהסיכוי שארטיק שהוא מייצר יהיה פגום הוא 0.01. מוכר הזמין 1000 ארטיקים מהמפעל. מה ההסתברות שהמוכר יקבל לפחות 980 ארטיקים תקינים אם טענת המפעל מוצדקת?

7) מהמר מטיל קובייה הוגנת 100 פעמים. בכל הטלה, אם מתקבל תוצאה זוגית בקובייה המהמר זוכה בשקל. אחרת, המהמר משלם שקל. המהמר הטיל את הקובייה 100 פעמים מה הסיכוי שהרווח של המהמר יהיה לכל היותר 10?

תשובות סופיות:

1) א. 0.201. ב. 0.3758. ג. התוחלת: 2, סטיית התקן: 1.2649.

2) א. 0.9332. ב. 0.6915.

3) 0.1611.

4) א. 0.9406. ב. בינומית - 0.0788, קירוב לנורמלית - 0.0778.

5) א. 0.015. ב. 398.

6) 0.9996.

7) 0.8643.

חוק המספרים הגדולים:

רקע:

חוק המספרים הגדולים מתייחס להשפעת הגדלת גודל המדגם על הסיכוי של פרופורציית המדגם (או ממוצע המדגם) להיות קרובה מהפרופורציה האמיתית (או מהממוצע האימתי).

החוק לגבי פרופורציה:

נניח שמבצעים מדגם מקרי מתוך אוכלוסייה אינסופית בה פרופורציית ההצלחות היא p, ככל שהמדגם גדול יותר: כך הסיכוי שפרופורציית המדגם ($\hat{p}$) תהיה בקרבת הפרופורציה באוכלוסייה (P) גבוה יותר.
ולכן הסיכוי לקבל ערך חריג הרחוק מהפרופורציה של האוכלוסייה קטן יותר.
בכתיבה מתמטית רושמים את חוק המספרים הגדולים לגבי הפרופורציה באופן הבא: $\lim_{n\to\infty} \widehat{P}_n = P$.

בספרות המקצועית קוראים לחוק הזה החוק החזק של המספרים הגדולים.
את החוק החלש של המספרים הגדולים רושמים באופן הבא: $P\left(|\hat{P}-P|<\varepsilon\right)\underset{n\to\infty}{\to}1$.

הערה: ככל שהמדגם גדל הסיכוי שפרופורציית המדגם תהיה בדיוק הפרופורציה האמיתית הולך וקטן.

החוק לגבי ממוצע: נניח שמבצעים מדגם מקרי מתוך התפלגות שבה התוחלת μ והשונות סופית. ככל שהמדגם גדול יותר, כך הסיכוי שממוצע המדגם ($\bar{X}$) יהיה בקרבת הממוצע באוכלוסייה (μ) גבוה יותר. לכן, הסיכוי לקבל ערך חריג הרחוק מהממוצע של האוכלוסייה קטן יותר. בכתיבה מתמטית רושמים את חוק המספרים הגדולים לגבי הממוצע באופן הבא: $\lim_{n\to\infty} \bar{X}_n = \mu$.

בספרות המקצועית קוראים לחוק הזה החוק החזק של המספרים הגדולים.
את החוק החלש של המספרים הגדולים רושמים באופן הבא: $P\left(|\bar{X}-\mu|<\varepsilon\right)\underset{n\to\infty}{\to}1$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

באוכלוסייה מסוימת 20% מהאוכלוסייה מובטלת. איזה סיכוי יותר גבוה? במדגם בגודל 100 פרופורציית המובטלים תסטה מהפרופורציה האמיתית בלא יותר מ-4%. במדגם בגודל 200 פרופורציית המובטלים תסטה מהפרופורציה האמיתית בלא יותר מ-4%. הסבירו.

שאלות:

1) באוכלוסייה מסוימת 20% מהאוכלוסייה מובטלת. איזה סיכוי יותר גבוה?
א. אחד מתוך מדגם של חמישה יהיה מובטל.
ב. שניים מתוך עשרה יהיו מובטלים. הסבירו וחשבו.

2) באוכלוסייה מסוימת 20% מהאוכלוסייה מובטלת. איזה סיכוי יותר גבוה?
א. לפחות 3 מתוך 10 יהיו מובטלים
ב. לפחות 30 מתוך 100 יהיו מובטלים. הסבירו.

3) גובה של אוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע 170 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ. דוגמים 4 אנשים באקראי.
א. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה מעל 176 ס"מ.
ב. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם הינו מגדילים את גודל המדגם? נמקו.

4) ידוע שבהצעת חוק מסוימת תומכים 60% מהציבור. נדגמו באקראי 10 אנשים.
א. מה ההסתברות שבדיוק 60% מהמדגם תומכים בהצעת החוק?
ב. כיצד התשובה הייתה משתנה אם היו דוגמים 20 אנשים?

5) שני חוקרים ביצעו מדגם מאותה אוכלוסייה. חוקר א דגם 20 תצפיות והשני דגם 40 תצפיות וכל אחד מהם חישב את ממוצע המדגם: $\bar{X}_{20}$ ו- $\bar{X}_{40}$.
ידוע שהתפלגות היא נורמלית ושהתוחלת באוכלוסייה הינה 500.
בסעיפים הבאים נמקו אילו הסתברויות מהזוגות המוצגים גדולה יותר או שהן שוות ונמקו.
א. $P\left(\bar{X}_{20}>500\right)$ או $P\left(\bar{X}_{40}>500\right)$.
ב. $P\left(480<\bar{X}_{20}<520\right)$ או $P\left(480<\bar{X}_{40}<520\right)$.
ג. $P\left(\bar{X}_{20}<490\right)$ או $P\left(\bar{X}_{40}<490\right)$.

6) נתון ש: $X\sim G(P=0.1)$. מבצעים מדגם אקראי בגודל n מההתפלגות הזו ומחשבים את ממוצע המדגם: $\bar{X}_n$.
הוכיחו: $\lim\limits_{n\to\infty}\bar{X}_n=10$.

תשובות סופיות:

1) אחד מתוך מדגם של חמישה יהיה מובטל.

2) לפחות 3 מתוך 10 יהיו מובטלים.

3) א. 0.1151. ב. קטנה.

4) א. 0.2508. ב. קטן.

5) א. $P\left(\bar{X}_{40} > 500\right) = P\left(\bar{X}_{20} > 500\right)$.

ב. $P\left(480 < \bar{X}_{40} < 520\right) > P\left(480 < \bar{X}_{20} < 520\right)$.

ג. $P\left(\bar{X}_{40} < 490\right) < P\left(\bar{X}_{20} < 490\right)$.

6) שאלת הוכחה.

סטטיסטיקה א

פרק 37 - אי שוויונים בהסתברות

תוכן העניינים

אי-שוויון צ'בישב:

רקע:

אם X הוא משתנה מקרי שתוחלתו ושונותו הן סופיות, אז לכל ערך a חיובי

מתקיים: $P\{|X-E(X)|\geq a\}\leq \frac{Var(X)}{a^2}$.

מכאן גם נובע שמתקיים: $P\{|X-E(X)|<a\}\geq 1-\frac{Var(X)}{a^2}$.

אי-שוויון צ׳בישב נותן חסמים להסתברות סימטרית סביב התוחלת ללא צורך בידיעת ההתפלגות של המשתנה המקרי X.

דוגמה:

נתון משתנה מקרי עם סטיית תקן של 3. האם יתכן שההסתברות שהסטייה של המשתנה המקרי מתוחלתו תהיה קטנה מ-5 היא 0.6?

$\sigma(X)=3$

$P\{|X-E(X)|<a\}\geq 1-\frac{Var(X)}{a^2}$, נציב:

$$P\{|X-E(X)|<5\}\geq 1-\frac{3^2}{5^2}=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}=0.64$$

$P\{|X-E(X)|<5\}\neq 0.6$, לכן לא יתכן.

שאלות:

1) מצאו חסמים להסתברויות הבאות עבור משתנה מקרי רציף בעל תוחלת 8 וסטית תקן 3 :

א. $p(2<x<14)$.

ב. $p(|x-8|\geq 9)$.

2) האם קיים משתנה מקרי X בעל תוחלת μ וסטית תקן σ שעבורו מתקיים $P(\mu-3\sigma\leq X\leq \mu+3\sigma)=0.7$? הסבירו.

3) מספר המטוסים המגיעים לנמל תעופה ב-20 דקות מתפלג התפלגות פואסונית עם תוחלת של 100. היעזרו באי-שוויון צ'בישב כדי למצוא גבול תחתון להסתברות שמספר המטוסים המגיעים בתקופה בת 20 דקות נתונה תהיה בין 80 ל-120.

4) מטילים מטבע 120 פעמים. מה ניתן להגיד על הסיכוי שהתוצאה עץ תתקבל בין 50 ל-70 פעמים לפי אי-שוויון צ'בישב?

5) מתוך קו יצור של רכיבים שאורכם הממוצע הנו 10 ס"מ ושונותם 3 סמ"ר יש לקחת מדגם. מהו גודל המדגם שיבטיח שבהסתברות של 0.9 לפחות ימצא ממוצע המדגם בין 9 ל-11 ס"מ?

6) אחוז התומכים במפלגה מסוימת הנו 40%. נלקח מדגם מקרי בגודל 200. תנו חסם תחתון לכך שאחוז התומכים במדגם יהיה בין 35% ל-45%.

7) בוחרים קוד n ספרתי באופן מקרי.

א. עבור $n=10$, העריכו את ההסתברות שממוצע הספרות במספר יסטה מתוחלתו בלפחות 1.

ב. מה אורך הקוד המינימלי (n) שיבטיח שבהסתברות של לפחות 95%, ממוצע הספרות יסטה מתוחלתו בפחות מ-0.75?

8) בעיר מסוימת ל-5% מהמשפחות אין מכונית, ל-20% יש מכונית אחת, ל-35% יש שתי מכוניות, ל-30% שלוש מכוניות וליתר ארבע מכוניות.
נניח שמספר המשפחות בעיר גדול מאד.
העריכו את ההסתברות שמספר המכוניות הכולל בעשר משפחות אקראיות יהיה לפחות 17 ולכל היותר ל-27.

9) $X_1, X_2..., X_n$ הם משתנים מקיים המתפלגים גיאומטרית עם פרמטר p באופן בלתי תלוי זה בזה. $0 < p < 1$. הוכיחו שמתקיים: $P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \geq \frac{2}{p}\right) \leq \frac{1-p}{n}$.

10) $X_1, X_2..., X_n$ הם משתנים מקיים המתפלגים פואסונית עם פרמטר $\lambda_i = i$, באופן בלתי תלוי זה בזה. נסמן את: $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
הוכיחו שמתקיים: $P(|2T - n(n+1)| < 2n) \geq \frac{n-1}{2n}$.

תשובות סופיות:

1) א. בין $\frac{3}{4}$ ל-1. ב. בין 0 ל-$\frac{1}{9}$.

2) לא יתכן.

3) 0.75.

4) לפחות 0.7.

5) לפחות 30.

6) 0.52.

7) א. לכל היותר 0.825. ב. 294.

8) 0.7056.

9) שאלת הוכחה.

10) שאלת הוכחה.

סטטיסטיקה א

פרק 38 - סטטיסטיקה תיאורית-הקדמה

תוכן העניינים

סטטיסטיקה תיאורית – הקדמה:

רקע:

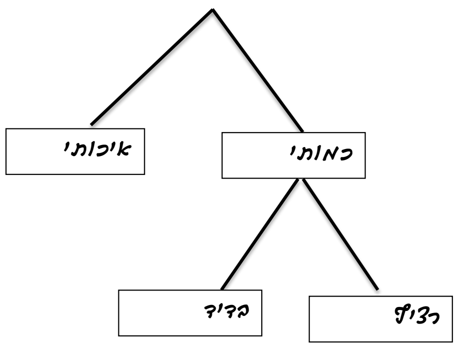
בסטטיסטיקה תיאורית אנו חוקרים קבוצה מסוימת, שיכולה להיות קבוצת ילדים בגן, קבוצת מניות בתיק, כלל התושבים בעיר מסוימת וכולי.
בין ישות לישות בקבוצה ישנם גורמים היכולים לקבל מספר ערכים. גורמים אלה נקראים משתנים. למשל, בין מניה למניה בתיק משתנה התשואה היומית של המניה, הוותק של המניה, תחום המניה וכדומה.
בסטטיסטיקה תיאורית אנחנו נתבונן בקבוצה מסוימת ובתוך הקבוצה הזו נאסוף נתונים לגבי משתנה מסוים ונלמד להציג את הנתונים ולנתח אותם מכל מיני אספקטים.

דוגמה:

בתיק מניות 10 מניות. מנהל התיק פרסם את התשואה של כל מניה בשנת 2011.

1) מי הקבוצה הנחקרת?
2) מה גודל הקבוצה?
3) מה המשתנה הנחקר?

סוגי משתנים:



משתנה איכותי

משתנה שלערכיו אין משמעות של יותר או פחות, אין עניין כמותי לערכים המתקבלים.
כמו: מקום מגורים של אדם (רעננה, תל אביב, אשדוד..), מין האדם (זכר, נקבה) ומצב משפחתי (רווק, נשוי, גרוש, אלמן).

משתנה כמותי

משתנה שערכיו הם מספרים, להם יש משמעות כמותית כמו: גובה אדם בס"מ, ציון בבחינה וכדומה.
את המשתנה הכמותי נסווג לשני סוגים:

1. משתנה בדיד – משתנה שערכיו מתקבלים מתוך סידרה של ערכים אפשריים. כמו: מספר ילדים למשפחה (1,2,3..) וציון בבחינה (מ-0 ועד 100 בקפיצות של 1).
2. משתנה רציף – משתנה שערכיו מתקבלים מתוך אינסוף ערכים בתחום מסוים. הערכים מתקבלים ברצף וללא קפיצות של ערכים. כמו:
גובה בס"מ – אם למשל, הגובה הנמוך ביותר הוא 150 ועד 190 ס"מ בקבוצה הגבהים הם ברצף. גם בין 160 ל-161 ס"מ יש רצף אינסופי של ערכים אפשריים לגובה (160.33 ס"מ הוא גם גובה אפשרי), משקל בק"ג, מהירות בקמ"ש וכולי.

שאלות:

1) סווגו את המשתנים הבאים לפי: איכותי / כמותי בדיד / כמותי רציף:
א. מספר הדירות בבניין.
ב. גיל אדם בשנים.
ג. אחוז האבטלה בעיר.
ד. מקצוע לימוד מועדף.

2) להלן התפלגות מספר האיחורים לעבודה בחודש של העובדים בחברת "סטאר":

מספר האיחורים	מספר העובדים
0	17
1	23
2	85
3	50
4	25

בחברה 200 עובדים.
א. מהו המשתנה הנחקר כאן?
ב. האם מדובר במשתנה איכותי או כמותי?
אם הוא כמותי האם הוא בדיד או רציף?

3) להלן רשימה של משתנים כמותיים, ציינו ליד כל אחד אם הוא רציף או בדיד:
א. שכר עובד ב-₪.
ב. ציון בחינת בגרות.
ג. תוצאה בהטלת קובייה.
ד. מהירות ריצה בתחרות.
ה. שיעור התמיכה בממשלה.

תשובות סופיות:

1) א. כמותי בדיד. ב. כמותי רציף. ג. כמותי רציף.
ד. איכותי.

2) א. מספר איחורים. ב. כמותי בדיד.

3) א. רציף. ב. בדיד. ג. בדיד.
ד. רציף. ה. רציף.

סטטיסטיקה א

פרק 39 - סטטיסטיקה תיאורית- הצגה של נתונים

תוכן העניינים

סטטיסטיקה תיאורית – הצגה של נתונים:

רקע:

דרכים להצגת נתונים שנאספו:

רשימה של תצפיות:

התצפית היא הערך שנצפה עבור ישות מסוימת בקבוצה. רושמים את התצפיות שהתקבלו כרשומה, יעיל שיש מספר מועט של תצפיות. ההצגה הזו רלבנטית לכל סוגי המשתנים. למשל, להלן מספר החדרים בבניין בן 5 דירות: 4, 5, 3, 4, 3.

טבלת שכיחויות בדידה:

שם המשתנה- X	שכיחות – $f(x)$	שכיחות יחסית באחוזים
X_1	f_1	$\frac{f_1}{N}\cdot 100$
X_2	f_2	$\frac{f_2}{N}\cdot 100$
X_3	f_3	$\frac{f_3}{N}\cdot 100$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
X_k	f_k	$\frac{f_x}{N}\cdot 100$
סה"כ	$N=\sum_{i=1}^{k} f_i$	100%

רושמים את התצפיות בטבלה שבה עמודה אחת מבטאת את ערכי המשתנה והשנייה את השכיחות. יעיל עבור משתנה איכותי וכמותי בדיד וכשיש מספר רב של תצפיות. לא יעיל למשתנה כמותי רציף.

דוגמה:

להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת:

הציון- X	מספר התלמידים – השכיחות - f	F_i	$\frac{f_i}{n}$
5	2	2	0.08=2/25
6	4	6	0.16=4/25
7	8	14	0.32=8/25
8	5	19	0.2=5/25
9	4	23	0.16=4/25
10	2	25	0.08=2/25

שכיחות מצטברת – צבירה של השכיחויות.

השכיחויות F_i – השכיחות המצטברת נותנת כמה תצפיות קטנות או שוות לערך.

שכיחות יחסית (פרופורציה) – השכיחות מחולקת לכמות התצפיות הכללי:

$\frac{f_i}{n}$ – איזה חלק מהתצפיות בקבוצה שוות לערך.

טבלת שכיחויות במחלקות:

משתמשים שהמשתנה כמותי רציף או כאשר יש מספר ערכים רב במשתנה הבדיד וטבלת שכיחויות תהיה ארוכה מידי.

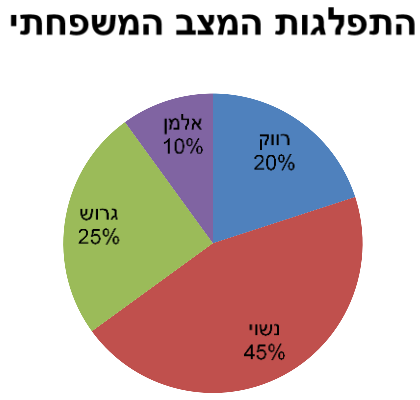
דוגמה:

נתנו לקבוצת ילדים לבצע משימה, בדקו את התפלגות זמן הביצוע, בדקות.
להלן ההתפלגות שהתקבלה:

זמן בדקות	מספר הילדים
0.5-3.5	20
3.5-9.5	18
9.5-19.5	14
19.5-29.5	8

דיאגרמת עוגה:

זהו התיאור הגרפי של משתנה איכותי. בדיאגראמת עוגה כל ערך במשתנה מקבל "נתח", שהוא פרופורציונלי לשכיחות היחסית של ערך המשתנה בנתונים.



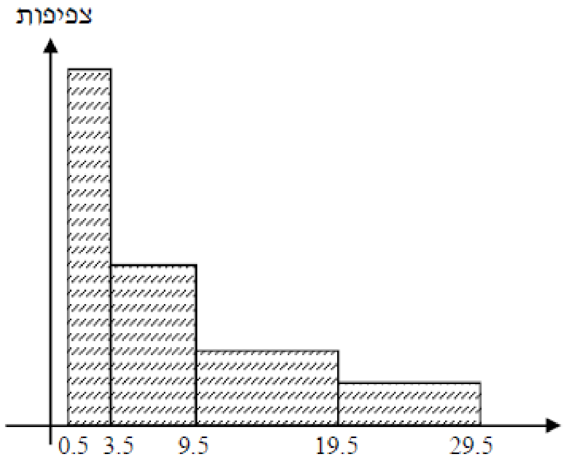
דיאגרמת מקלות:

הציר האופקי הוא הציר של המשתנה והציר האנכי של השכיחות, כך שהגובה של המקל מעיד על השכיחות. רלבנטי למשתנה כמותי בדיד. לא נהוג להשתמש בתיאור למשתנה איכותי וכמו כן לא למשתנה כמותי רציף, וכן בסולמות מדידה עבור משתנה מסולם סדר.

היסטוגרמה:

היסטוגרמה היא הדרך הגרפית כדי לתאר טבלת שכיחויות במחלקות, והיא רלוונטית למשתנה כמותי רציף.
בהיסטוגרמה הציר האופקי הוא הציר של המשתנה והציר האנכי הוא הציר של הצפיפות.
הצפיפות מחושבת בכל מחלקה על ידי חלוקת השכיחות ברוחב של כל המחלקה, והיא נותנת את מספר התצפיות הממוצע בכל מחלקה ליחדה. אם המחלקות הן שוות ברוחב, ניתן לשרטט את ההיסטוגרמה לפי השכיחות ואין צורך בצפיפות.

X	רוחב	אמצע	שכיחות	מצטברת	צפיפות
0.5 - 3.5	3	2	20	20	6.6667
3.5 - 9.5	6	6.5	18	38	3
9.5 - 19.5	10	14.5	14	52	1.4
19.5 - 29.5	10	24.5	8	60	0.8



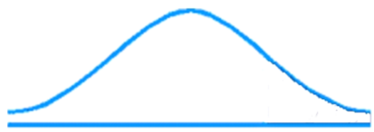
פוליגון – מצולעון:

אם נחבר את אמצע קצה כל מלבן בקווים ישרים.
נותן מראה חזותי לצורה של התפלגות המשתנה.

צורות התפלגות נפוצות:

התפלגות סימטרית פעמונית

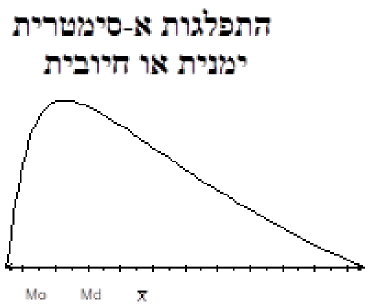
רוב התצפיות במרכז, וככל שנתרחק מהמרכז יהיו פחות תצפיות באופן סימטרי. לדוגמה, ציוני IQ.



ישנן התפלגויות סימטריות שאינן פעמוניות, כגון:

התפלגות אסימטרית ימנית (חיובית)

רוב התצפיות מקבלות ערכים נמוכים ויש מיעוט הולך וקטן של תצפיות שמקבלות ערכים גבוהים קיצוניים. לדוגמה, שכר במשק.



התפלגות אסימטרית שמאלית (שלילית)

רוב התצפיות מקבלות ערכים גבוהים ויש מיעוט הולך וקטן של תצפיות שמקבלות ערכים נמוכים קיצוניים. לדוגמה, אורך חיים.

שאלות:

1) בסקר צפייה בטלוויזיה התקבלו התוצאות הבאות: 25 צפו בערוץ הראשון, 25 צפו בערוץ 10, 75 צפו בערוץ השני, 50 צפו באחד מערוצי הכבלים ו-25 לא צפו בטלוויזיה בזמן הסקר.

א. רשמו את טבלת השכיחות ואת השכיחות היחסית.

ב. תארו את הנתונים באופן גרפי.

2) להלן נתונים על התפלגות המקצוע המועדף של תלמידי שכבה ו' בבית הספר "מעוף":

המקצוע	מספר התלמידים
מתמטיקה	44
תנ"ך	20
אנגלית	12
היסטוריה	26

א. מהו המשתנה הנחקר?

ב. מהי פרופורציית התלמידים שמעדיפים תנ"ך?

3) להלן התפלגות ההשכלה במקום עבודה מסוים:

השכלה	מספר העובדים
נמוכה	60
תיכונית	120
אקדמאית	20

א. מהו המשתנה הנחקר? מאיזה סולם הוא?

ב. תארו את הנתונים באופן גרפי.

4) להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא: 6, 5, 8, 7, 6, 9, 8, 6, 7, 6, 7, 8, 5, 4, 6, 10, 9, 8, 6, 7.

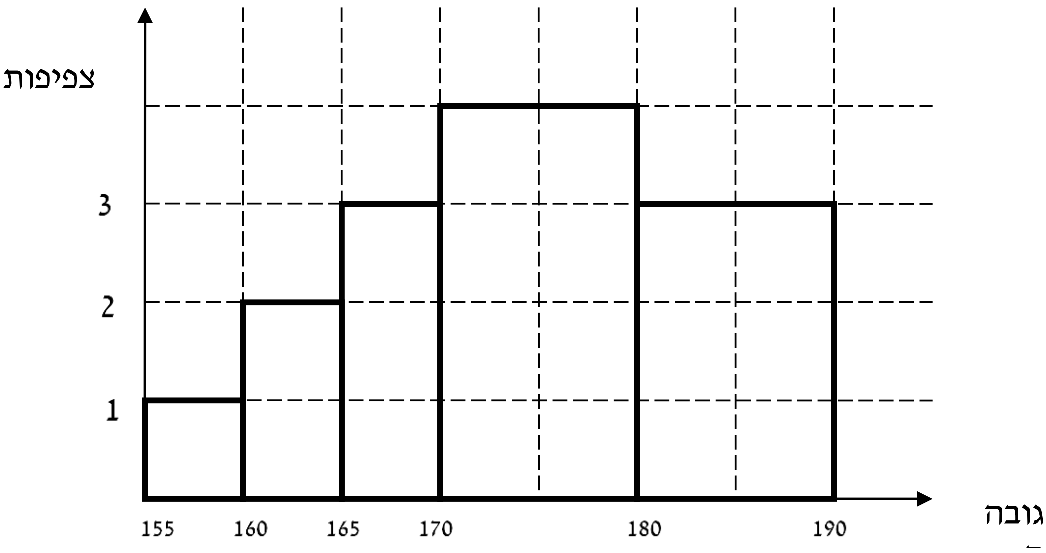
א. מהו המשתנה? האם הוא בדיד או רציף?

ב. תארו את הרשימה בטבלת שכיחויות.

ג. הוסיפו שכיחויות יחסיות לטבלה.

ד. תארו את הנתונים באופן גרפי.

5) להלן היסטוגרמה המתארת את התפלגות הגבהים בס"מ של קבוצה מסוימת:



א. מהו המשתנה הנחקר? האם הוא בדיד או רציף?
ב. תארו את הנתונים בטבלת שכיחויות במחלקות.
ג. הוסיפו שכיחות יחסית לטבלה.
ד. הוסיפו את הצפיפות של כל מחלקה לטבלה.
ה. מהי צורת ההתפלגות של הגבהים?

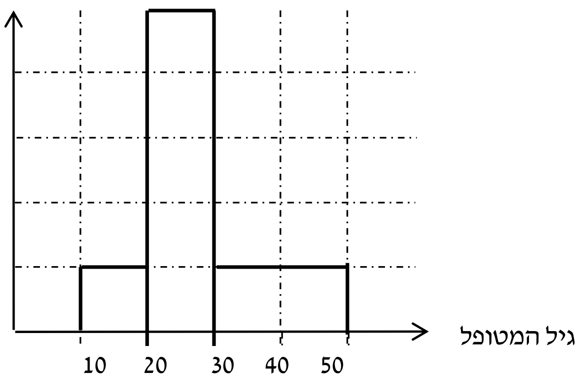
6) להלן התפלגות המשקל של קבוצה מסוימת בק"ג:

משקל	מספר מקרים
40-45	10
45-50	20
50-60	30
60-65	20
65-70	10

א. תארו את ההתפלגות באופן גרפי.
ב. מה ניתן להגיד על צורת ההתפלגות?

7) להלן גיל המטופלים של ד"ר שוורץ בשנים:
קנה מידה:

$\square$ =8 מטופלים



א. מה המשתנה הנחקר? האם הוא בדיד או רציף?
ב. מהי הקבוצה הנחקרת?
ג. תרגמו את ההסיטוגרמה לטבלת שכיחות.
ד. מהי הפרופורציה של המטופלים של ד"ר שוורץ בגילאים 20-30?

תשובות סופיות:

1) א. להלן טבלה:

x	$f(x)$	$\frac{f(x)}{n}$	%
ערוץ 1	25	$\frac{25}{200}$	12.5%
ערוץ 10	25	$\frac{25}{200}$	12.5%
ערוץ 2	75	$\frac{75}{200}$	37.5%
כבלים	50	$\frac{50}{200}$	25%
לא צפו	25	$\frac{25}{200}$	12.5%
סה"כ	200	1	100%

ב. עיין גרף מלא בסרטון הוידאו.

2) א. מקצוע מועדף.
ב. 19.6%.

3) א. משתנה נחקר: השכלה, סוג: סדר.
ב. עיין גרף מלא בסרטון הוידאו.

4) א. המשתנה: ציון, משתנה בדיד.
ד. עיין גרף מלא בסרטון הוידאו.

ב+ג. להלן טבלה:

x	$f(x)$	$\frac{f(x)}{n}$	%
4	1	$\frac{1}{20}$	5%
5	2	$\frac{2}{20}$	10%
6	6	$\frac{6}{20}$	30%
7	4	$\frac{4}{20}$	20%
8	4	$\frac{4}{20}$	20%
9	2	$\frac{2}{20}$	10%
10	1	$\frac{1}{20}$	5%
סה"כ	20	20	100%

5) א. גובה בס"מ, רציף.

ב+ג+ד. להלן טבלה:

ה. אסימטרית.

x	$f(x)$	$\frac{f(x)}{n}$	%	d
155-160	5	$\frac{5}{100}$	5%	1
160-165	10	$\frac{10}{100}$	10%	2
165-170	15	$\frac{15}{100}$	15%	3
170-180	40	$\frac{40}{100}$	40%	4
180-190	30	$\frac{30}{100}$	30%	3

6) א. עיין גרף מלא בסרטון הוידאו. ב. סימטרית.

7) א. המשתנה: גיל בשנים, משתנה רציף. ב. המטופלים של ד"ר שוורץ.

ד. להלן טבלה: ה. 62.5%.

x	$f(x)$
10-20	8
20-30	40
30-50	16

סטטיסטיקה א

פרק 40 - סטטיסטיקה תיאורית- סכימה

תוכן העניינים

סטטיסטיקה תיאורית – סכימה:

רקע:

בסטטיסטיקה ישנה צורת רישום מקובלת לסכום של תצפיות: $\sum_{i=1}^{n} X_i$.

נסביר את צורת הרישום על ידי הדוגמה הבאה:

i	X_i
1	5
2	0
3	1
4	3
5	2

(הסבר מלא מופיע בסרטונים באתר).

שאלות:

1) בבניין 5 דירות. לכל דירה רשמו את מספר החדרים שיש בדירה (X), ומספר הנפשות החיות בדירה (Y). חשבו:

מספר דירה	X	Y
1	2	1
2	3	1
3	2	2
4	4	3
5	3	2

א. $\sum_{i=1}^{3} X_i$.

ב. $\sum_{i=1}^{5} Y_i$.

ג. $\sum_{i=1}^{4} X_i$.

ד. $\left(\sum_{i=1}^{4} X_i\right)^2$.

ה. $\sum X_i$.

ו. $\sum X_i Y_i$.

ז. $\sum(X_i)\sum(Y_i)$.

2) נתון לוח ערכי המשתנים X_i ו- Y_i, כאשר: $i=1,2,...,6$, ונתונים הקבועים: $a=2$, $b=5$. חשבו את הנוסחאות הבאות:

i	1	2	3	4	5	6
X_i	3	2	4	-2	1	4
Y_i	2	0	0	1	-5	2

א. $\sum_{i=1}^{4} y_i$.

ב. $\sum_{i=1}^{6} a$.

ג. $\sum_{i=1}^{6} x_i y_i$.

ד. $\sum_{i=1}^{6} (x_i + y_i)$.

ה. $\sum_{i=1}^{6} x_i + a$.

3) קבעו לכל זהות האם היא נכונה:

א. $\sum_{i=1}^{n} bX_i = b \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$.

ב. $\sum_{i=1}^{n} a = a \cdot n$.

ג. $\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^{\ 2}$.

4) נתון: $\sum_{i=1}^{10} X_i^2 = 1640$, $\sum_{i=1}^{10} X_i = 80$.

חשבו: $\sum_{i=1}^{10} (X_i - 4)^2$.

תשובות סופיות:

1)	א. 7.	ב. 9.	ג.11.	ד. 121.
	ה. 14.	ו. 27.	ז. 126.	
2)	א. 3.	ב. 12.	ג.7.	
	ד. 12.	ה. 14.		
3)	א. נכונה.	ב. נכונה.	ג. לא נכונה.	
4)	1160.			

סטטיסטיקה א

פרק 41 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום מרכזי

תוכן העניינים

סטטיסטיקה תיאורית – מדדי מיקום מרכזי:

רקע:

המטרה במדדי המיקום המרכזי היא למדוד את מרכז ההתפלגות של התצפיות.

השכיח – Mode:

השכיח הוא הערך הנפוץ ביותר בהתפלגות.

ברשימה

הערך החוזר על עצמו הכי הרבה פעמים : 6, 10, 4, 8, 4, 9, 7.

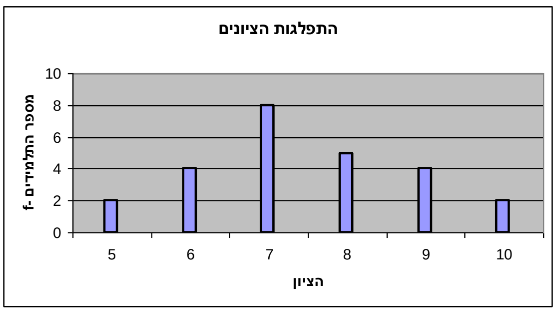
בטבלת שכיחויות בדידה

הערך שהשכיחות שלו היא הגבוהה ביותר.

# תוכניות החיסכון	$f(x)$
0	100
1	75
2	25
3	25
4	25

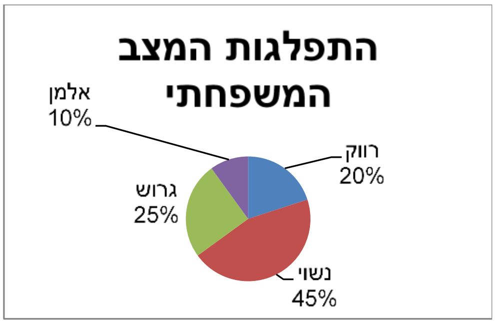
בדיאגרמת מקלות

שיעור ה- X של המקל הגבוה ביותר.



בעוגה

הערך של הפלח הגדול ביותר.



בטבלת שכיחויות במחלקות

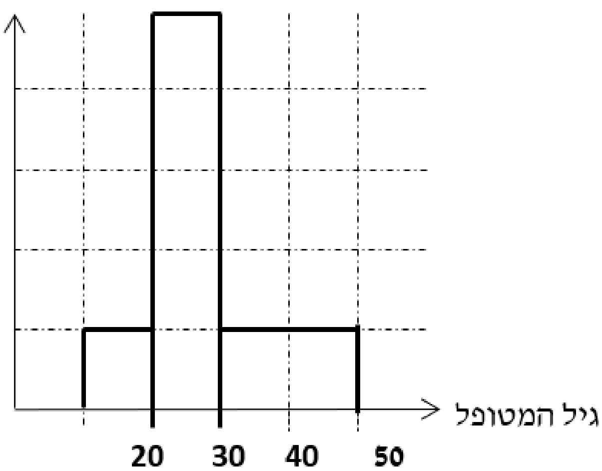
אמצע המחלקה עם הצפיפות הגבוהה ביותר.
לדוגמה, התפלגות הציונים בכיתה:

X	$f(x)$
0-60	20
60-70	10
70-80	18
80-90	15
90-100	15

בהיסטוגרמה

שיעור ה- X של אמצע המחלקה הגבוהה ביותר.
לדוגמה, גיל המטופלים של ד"ר שוורץ בשנים:

$\square = 8$



כללי

יתכן שלהתפלגות יותר משכיח אחד.

השכיח הוא מדד הרלבנטי לכל סוגי המשתנים.

אמצע תחום (טווח) – Midrange:

הממוצע בין התצפית הגבוהה ביותר לתצפית הנמוכה ביותר:

$MR = \frac{X_{\min} + X_{\max}}{2}$.

החציון – Median:

החציון הוא ערך שמחצית מהתצפיות קטנות או שוות לו ומחצית מהתצפיות גדולות או שוות לו.

ברשימה

נסדר את התצפיות בסדר עולה.

אם יש מספר אי זוגי של איברים, מקומו של החציון יהיה התצפית שמיקומה: $\frac{n+1}{2}$.

אם יש מספר זוגי של איברים – החציון הוא ממוצע של האיבר ה- $\frac{n}{2}$,

והאיבר ה- $\frac{n}{2}+1$, כלומר שיש מספר אי-זוגי של תצפיות החציון יהיה: $md = X_{\frac{n+1}{2}}$,

וכשיש מספר זוגי של תצפיות החציון יהיה: $md = \frac{X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n}{2}+1}}{2}$.

בטבלת שכיחויות בדידה

נעשה תהליך דומה אך נעזר בשכיחות המצטברת.

דיאגרמת מקלות

נמיר לטבלת שכיחויות בדידה במטרה למצוא את החציון.

בטבלת שכיחויות במחלקות

שלב א: נמצא את המחלקה החציונית שמיקומה יהיה $\frac{n}{2}$.

שלב ב: נציב בנוסחה הבאה: $Md = L_0 + \frac{\frac{n}{2} - F(x_{m-1})}{f(x_m)} \cdot (L_1 - L_0)$.

$F(x_{m-1})$ - שכיחות מצטברת של מחלקה אחת לפני המחלקה החציונית.

$f(x_m)$ - השכיחות של המחלקה החציונית.

L_0 - גבול התחתון של המחלקה.

L_1 - גבול העליון של המחלקה.

היסטוגרמה

החציון הוא הערך על ציר ה- X שמחלק את ההיסטוגרמה לשני חלקים שווים בשטח.

כללי

החציון אינו רלבנטי למשתנה מסולם שמי ולא רלבנטי למשתנה איכותי.

הממוצע – Average:

הממוצע הוא מרכז הכובד של ההתפלגות.

ברשימה

$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$.

בטבלת שכיחויות

$\bar{x} = \frac{\sum x \cdot f}{n}$.

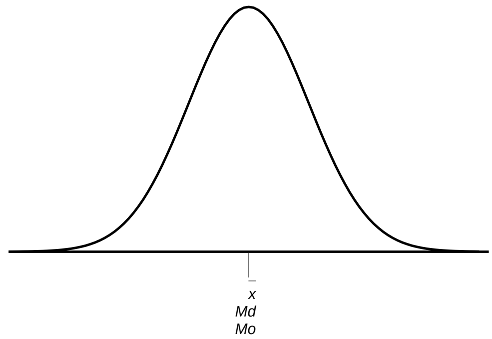
כללי

הממוצע רלבנטי רק למשתנה כמותי.

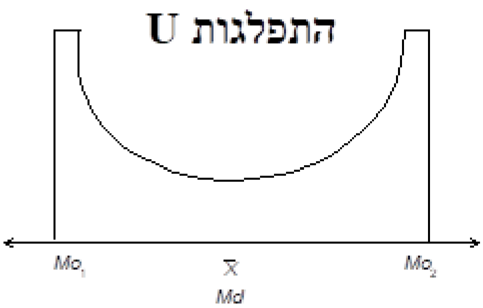
מדדי המיקום המרכזי בהתפלגויות המיוחדות:

בהתפלגות סימטרית פעמונית כל מדדי המרכז שווים זה לזה:

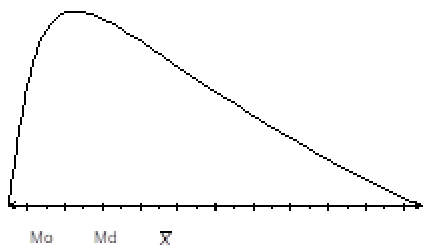
התפלגות סימטרית



בהתפלגות סימטרית השכיח לא חייב להיות במרכז:



התפלגות א-סימטרית ימנית או חיובית



התפלגות א-סימטרית שמאלית או שלילית

שאלות:

1) להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא:
6, 5, 8, 7, 6, 9, 8, 6, 7, 6, 7, 8, 5, 4, 6, 10, 9, 8, 6, 7.
חשבו את החציון, השכיח, והממוצע של הציונים.

2) בדקו את מספר החדרים לדירה בבניין בן 5 דירות והתקבל ממוצע 3.8.
לגבי 4 דירות נמצא מספר חדרים: 5, 4, 3, 4.
א. כמה חדרים יש בדירה החמישית?
ב. מהו השכיח ומהו החציון?

3) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה שנספרו עבור כל משפחה בישוב מסוים:

מספר משפחות	מספר מקלטים
22	0
28	1
18	2
22	3
10	4

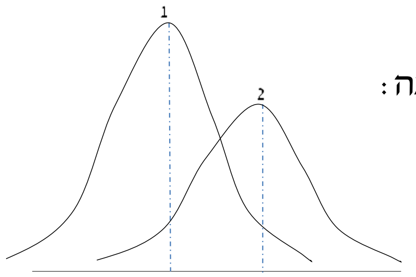
א. חשבו את הממוצע, החציון והשכיח של ההתפלגות.
ב. הסבירו ללא חישוב כיצד כל מדד שחישבת בסעיף א' היה משתנה אם חלק מהמשפחות (לא כולן) שלא היה להם עד היום טלוויזיה היו רוכשים מקלט אחד.

4) להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה בישוב "הגורן":

מספר מכוניות למשפחה	1	2	3	4	5
שכיחות	65	150	220	140	55

א. כמה משפחות יש בישוב?
ב. מה אחוז המשפחות בישוב עם לכל היותר 2 מכוניות?
ג. חשבו את הממוצע, החציון והשכיח.

הקפידו להסביר לגבי כל סעיף מה משמעות התוצאה שקיבלתם!



5) מורה לימד 2 כיתות, הוא תיאר באותה מערכת צירים את התפלגות הציונים בכל כיתה. בחרו בתשובה הנכונה:

א. בכיתה 1 השכיח גבוה יותר מכיתה 2.

ב. בכיתה 2 השכיח גבוה יותר מכיתה 1.

ג. בשתי הכיתות אותו שכיח.

ד. לא ניתן לדעת באיזו כיתה השכיח גדול יותר.

תשובות סופיות:

1) חציון: 7, שכיח: 6, ממוצע: 6.9.

2) א. 3. ב. שכיח: 3.4, חציון: 4.

3) א. ממוצע: 1.7, חציון: 1.5, שכיח: 1.
ב. הממוצע יגדל ויתר המדדים לא ישתנו.

4) א. 630. ב. 34.13%. ג. שכיח וחציון: 3, ממוצע: 2.952.

5) ב'.

סטטיסטיקה א

פרק 42 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - הטווח, השונות וסטיית התקן

תוכן העניינים

סטטיסטיקה תיאורית – מדדי פיזור – הטווח, השונות וסטיית התקן:

רקע:

המטרה: למדוד את הפיזור של הנתונים, כלומר כמה הם רחוקים זה מזה ושונים זה מזה.

הטווח / תחום (RANGE):
ההפרש בין התצפית הגבוהה ביותר לנמוכה ביותר: $R = X_{\max} - X_{\min}$.

שונות וסטיית תקן:
שונות היא ממוצע ריבועי של הסטיות מהממוצע וסטיית התקן היא שורש של השונות.

עבור סדרת נתונים: $S_x{}^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2$.

דוגמאות:

1) נחשב את השונות של סדרת המספרים הבאה: 9, 4, 5.

עבור טבלת שכיחויות: $S_x{}^2 = \dfrac{\sum(x - \bar{x})^2 f}{n} = \dfrac{\sum x^2 \cdot f}{n} - \bar{x}^2$.

2) להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת בה ממוצע הציונים הוא 7.44.

הציון X	השכיחות F	$x^2 \cdot F$
5	2	50
6	4	144
7	8	392
8	5	320
9	4	324
10	2	200
סה"כ		**1430**

$$S_x{}^2 = \frac{\sum_x x^2 f(x)}{n} - \bar{x}^2 = \frac{1430}{25} - 7.44^2 = 1.8464$$

$$S = \sqrt{S_x{}^2} = \sqrt{1.8464} = 1.3588$$

כשיש מחלקות נעזר באמצע המחלקה כדי לחשב את השונות.

שאלות:

1) להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא:
6, 5, 8, 7, 6, 9, 8, 6, 7, 6, 7, 8, 5, 4, 6, 10, 9, 8, 6, 7.
חשבו את השונות, סטיית התקן והטווח של הציונים.

2) להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה בישוב "הגורן":

מספר מכוניות למשפחה	1	2	3	4	5
שכיחות	65	150	220	140	55

א. חשבו סטיית התקן.
ב. חשבו את הטווח של הנתונים.
הקפידו להסביר לגבי כל סעיף מה משמעות התוצאה שקיבלתם.

3) בחברה העוסקת בטלמרקטינג בדקו עבור כל עובד את מספר שנות הוותק שלו. התקבל שממוצע שנות הוותק הוא 4 שנים וסטיית התקן היא שנתיים.
א. האם הממוצע יגדל/יקטן/לא ישתנה וסטיית התקן תגדל/תקטן/לא תשנה כאשר יתווספו שני עובדים עם וותק של 4 שנים להתפלגות?
ב. האם הממוצע יגדל/יקטן/לא ישתנה וסטיית התקן תגדל/תקטן/לא תשנה כאשר יתווספו שני עובדים אשר אחד עם וותק של 0 שנים והשני עם וותק של 8 שנים להתפלגות?

4) נתונה רשימה של 5 תצפיות, אך רק עבור 4 מהן נרשמו הסטיות שלהן מהממוצע: 2, 3, 2, 1-. חשבו את השונות של חמש התצפיות.

5) בשכונה בדקו בכל דירה את מספר החדרים לדירה. בשכונה 200 דירות.

מספר חדרים	**פרופורציה**
1	0.1
2	0.2
3	0.4
4	0.15
5	

א. מה הממוצע של מספר החדרים לשכונה בדירה?
ב. חשבו את סטיית התקן של מספר החדרים לדירה.
ג. חלק מבעלי הדירות בנות 2 החדרים הפכו את דירתם לדירת חדר. כיצד הדבר ישפיע(יקטין, יגדל, לא ישנה)
על כל מדד שחישבתם בסעיפים הקודמים

תשובות סופיות:

1) שונות: 2.19, סטיית תקן: 1.48, טווח: 6.

2) א. סטיית תקן: 1.106. ב. טווח: 4.

3) א. ממוצע לא ישתנה, סטיית התקן תקטן.
ב. ממוצע לא ישתנה, סטיית התקן תגדל.

4) 10.8.

5) א. 3.05. ב. 1.16. ג. ממוצע: יקטן, סטיית התקן: תגדל.

סטטיסטיקה א

פרק 43 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - טווח בין רבעוני

תוכן העניינים

סטטיסטיקה תיאורית – מדדי פיזור – טווח בין רבעוני:

רקע:

הטווח הבין-רבעוני (יש הקוראים לו התחום הבין-רבעוני) נותן את הטווח בין הרבעונים בו נמצאים 50% מהתצפיות המרכזיות. הרעיון ליצור מדד פיזורי שלא רגיש לתצפיות החריגות ביותר. כדי לחשב את הטווח הבין-רבעוני יש למצוא את הרבעון התחתון והעליון של התפלגות התצפיות.

רבעון תחתון – ערך שמחלק את ההתפלגות לשניים.
25% מהמקרים נמוכים ממנו או שווים לו ו75% מהמקרים גבוהים או שווים לו.
סימון: Q_1.

רבעון עליון – ערך שמחלק את ההתפלגות לשניים.
75% מהמקרים נמוכים ממנו או שווים לו ו25% מהמקרים גבוהים או שווים לו.
סימון: Q_3.

הטווח הבין רבעוני הוא הפער בין שני הרבעונים: $IQR = Q_3 - Q_1$.

שלבים במציאת טווח בין-רבעוני בטבלת שכיחויות:

שלב א: נמצא את הרבעון התחתון: הוא הערך שהשכיחות היחסית המצטברת באחוזים עברה לראשונה את 25%.

שלב ב: נמצא את הרבעון העליון: הוא הערך שהשכיחות היחסית המצטברת באחוזים עברה לראשונה את 75%.

שלב ג: נמצא את הטווח הבין-רבעוני: נחסר את הרבעונים: $IQR = Q_3 - Q_1$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בסניף בנק 250 לקוחות. ספרו לכל לקוח את מספר תוכניות החיסכון שלו.
מהו הטווח הבין-רבעוני של מספר תוכניות החיסכון בסניף?

# תוכניות החיסכון	$f(x)$	שכיחות מצטברת	שכיחות יחסית מצטברת
0	100		
1	75		
2	25		
3	25		
4	25		

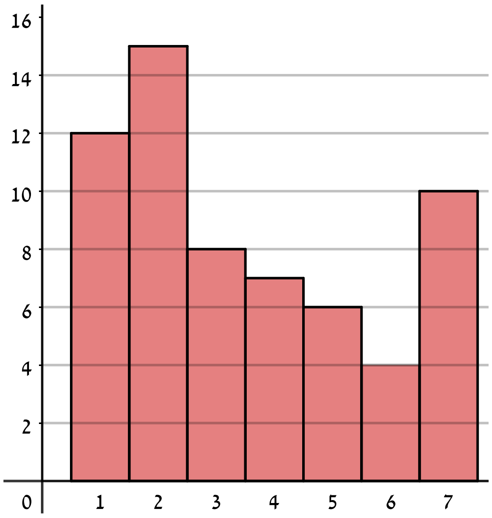
שאלות:

(1 להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה בישוב "הגורן":

מספר מכוניות למשפחה	1	2	3	4	5
שכיחות	65	150	220	140	55

מהו הטווח הבין-רבעוני של מספר המכוניות למשפחה בישוב "הגורן"?

(2 בסקר שנעשה בדקו את מספר ימי המחלה השנתיים של מורים בארץ.



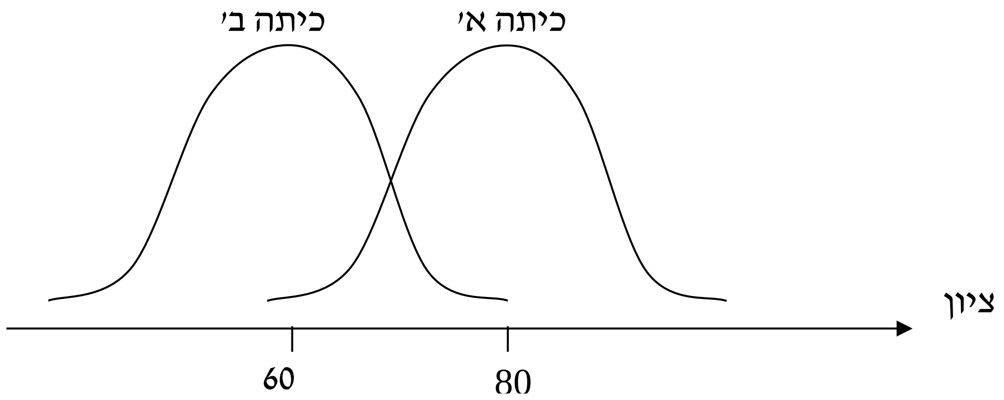
א. מה מייצגים הערכים בציר האופקי?

ב. מהו הטווח הבין-רבעוני של מספר ימי המחלה של המורים

ג. אם נוסיף 25 מורים אשר הצהירו שמספר ימי המחלה השנתיים שלהם הוא 4 ימים, כיצד הדבר ישנה את הטווח הבין-רבעוני? הסבירו.

ד. אם מסתבר שחלק מהמורים בסקר הצהירו שהם חלו 7 ימים בשנה אבל בפועל הם חלו 8 ימים, כיצד הדבר ישנה את הטווח הבין-רבעוני? הסבירו.

3) לפניך שתי עקומות המתארות את התפלגות הציונים בכל כיתה.
באיזו כיתה הטווח הבין-רבעוני גדול יותר?



א. כיתה א.
ב. כיתה ב'.
ג. לשתיהן אותו טווח בין-רבעוני.
ד. לא ניתן לדעת, אין מספיק נתונים.

4) הוספת גודל קבוע לכל תצפיות סדרת נתונים:
א. תגדיל את הטווח הבין-רבעוני.
ב. תקטין את הטווח הבין-רבעוני.
ג. לא תשנה הטווח הבין-רבעוני.
ד. לא ניתן לדעת מה יקרה לטווח הבין-רבעוני.

5) חושב הטווח הבין-רבעוני עבור התפלגות מסוימת והתקבלה התוצאה אפס.
לכן:
א. לפחות 50% מהתצפיות זהות.
ב. סטיית התקן היא אפס.
ג. ההתפלגות היא סימטרית.
ד. מצב זה כלל לא יתכן.

6) סניף מספר 543 של בנק "רווהה" בדק ל-80 לקוחות את מספר הפעמים שכל לקוח נכנס לסניף הבנק במשך שבוע. התוצאות שהתקבלו הן:
50 אנשים נכנסו 0 פעמים לסניף.
20 אנשים נכנסו פעם אחת לסניף.
5 אנשים נכנסו פעמיים לסניף.
5 אנשים נכנסו יותר מפעמיים.
מהו הטווח הבין-רבעוני?
א. 60.
ב. 2.
ג. 50.
ד. 1.

7) התפלגות הציונים במבחן ווקסלר היא סימטרית לכן:
א. טווח הציונים הוא אפס.
ב. הטווח הבין רבעוני של הציונים אפס.
ג. סעיפים א ו-ב הם נכונים.
ד. אף סעיף אינו נכון.

תשובות סופיות:

1) 2.
2) א. מספר ימי המחלה השנתיים. ב. 3. ג. יקטן. ד. לא ישתנה.
3) ג'.
4) ג'.
5) א'.
6) ד'.
7) ד'.

סטטיסטיקה א

פרק 44 - סטטיסטיקה תיאורית- מדדי מיקום יחסי-ציון תקן

תוכן העניינים

סטטיסטיקה תיאורית – מדדי מיקום יחסי – ציון תקן:

רקע:

המטרה למדוד איך תצפית ממוקמת ביחס לשאר התצפיות בהתפלגות.

ציון תקן:

הנוסחה לציון תקן של תצפית היא: $Z = \frac{X - \overline{X}}{S}$.

ציון התקן נותן כמה סטיות תקן סוטה התצפית מהממוצע. כלומר, ציון התקן מעיד על כמה סטיות תקן התצפית מעל או מתחת לממוצע:

- ציון תקן חיובי אומר שהתצפית מעל הממוצע.
- ציון תקן שלילי אומר שהתצפית מתחת לממוצע.
- ציון תקן אפס אומר שהתצפית בדיוק בממוצע.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

במקום עבודה מסוים, ממוצע המשכורות הוא 8 אלף ₪, עם סטית תקן של אלפיים ₪.
באותו מקום עבודה ההשכלה הממוצעת של העובדים הנה 14 שנים, עם סטית תקן של 1.5 שנים. ערן מרוויח במקום עבודה זה 11 אלף ₪ והשכלתו 16 שנים.
מה ערן יותר, באופן יחסי, משכיל או משתכר?

שאלות:

1) תלמידי כיתה ח' ניגשו למבחן בלשון ולמבחן במתמטיקה.
להלן התוצאות שהתקבלו:

המקצוע	ממוצע	סטיית תקן
לשון	74	12
מתמטיקה	80	16

עודד קיבל: 68 בלשון ו-70 במתמטיקה.
א. באיזה מקצוע עודד טוב יותר באופן יחסי לשכבה שלו?
ב. איזה ציון עודד צריך לקבל במתמטיקה כדי שיהיה שקול לציונו בלשון?

2) במפעל לייצור מצברים לרכב בדקו במשך 40 ימים את התפוקה היומית (מספר מצברים במאות) ואת מספר הפועלים שעבדו באותו היום.
להלן טבלה המסכמת את המידע שנאסף על שני המשתנים:

	תפוקה	מספר פועלים
ממוצע	48	15
סטיית תקן	10	2

באחד הימים מתוך כלל הימים שנבדקו התפוקה הייתה 50 מאות מצברים ובאותו היום עבדו 13 פועלים.
מה יותר חריג באותו היום, יחסית לשאר הימים שנבדקו: נתוני התפוקה או כמות הפועלים?
א. התפוקה.
ב. כמות הפועלים.
ג. חריגים באותה מידה.
ד. חסרים נתונים כדי לדעת זאת.

3) הגובה הממוצע של המתגייסים לצבא הוא 175 סנטימטר עם סטיית תקן של 10 סנטימטר. המשקל הממוצע הוא 66 ק"ג עם סטיית תקן של 8 ק"ג.
ערן התגייס כשגובהו 180 ס"מ ומשקלו 59 ק"ג.
א. במה ערן חריג יותר ביחס לשאר המתגייסים, גובהו או משקלו?
ב. כמה ערן אמור לשקול כדי שמשקלו יהיה שקול לגובהו?

תשובות סופיות:

1) א. לשון. ב. 72.
2) ב'.
3) א. משקל. ב. 70.

סטטיסטיקה א

פרק 45 - סטטיסטיקה תיאורית - טרנספורמציה לינארית

תוכן העניינים

סטטיסטיקה תיאורית – טרנספורמציה לינארית:

רקע:

מצב שבו מבצעים שינוי מסוג הוספה (או חסרה) של קבוע, והכפלה (או חילוק) של קבוע, לכל התצפיות: $y = a \cdot x + b$. כך יושפעו המדדים השונים:

מדדי המרכז:

$$MR_y = a \cdot MR + b$$
$$MO_y = a \cdot MO + b$$
$$\bar{y} = a \cdot \bar{x} + b$$
$$Md_y = a \cdot \leq Md_x + b$$

מדדי הפיזור:

$$R_y = |a| R_x$$
$$S_y = |a| S_x$$
$$S_y{}^2 = a^2 S_x{}^2$$

מדדי המיקום היחסי:

$$Y_p = a \cdot X_p + b$$
$$Z_Y = \frac{a}{|a|} Z_x$$

שלבי העבודה:

1. נזהה שמדובר בטרנספורמציה לינארית (שינוי קבוע לכל התצפיות).
2. נרשום את כלל הטרנספורמציה לפי נתוני השאלה.
3. נפשט את הכלל ונזהה את ערכי a ו-b.
4. נציב בנוסחאות שלעיל בהתאם למדדים שנשאלים.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

השכר הממוצע של עובדים הינו 9000 ₪ וטווח 6000 ₪. חשבו את המדדים הללו לאחר שהעלו את כל המשכורות ב-10% ואחר כך קנסו אותם ב-100 ₪.

שאלות:

1) עבור סדרת נתונים התקבל: $\bar{x}=80, S=15, MO=70$.
הוחלט להכפיל את כל התצפיות ב-4 ולהחסיר מהתוצאה 5.
חשבו את המדדים הללו לאחר השינוי.

2) בחברה מסוימת השכר הממוצע הוא 40 ₪ לשעה עם סטיית תקן של 5 ₪ לשעה.
הוחלט להעלות את כל המשכורות ב-10%, אך זה לא סיפק את העובדים ולכן הם קיבלו לאחר מכן תוספת של 2 ₪ לשעה.
מה הממוצע ומהי השונות של השכר לשעה לאחר כל השינויים.

3) במבחן מסוים הציון החציוני היה 73, טווח הציונים היה 40 נקודות והעשירון העליון היה הציון 87. כיוון שהציונים בבחינה היו נמוכים, המורה החליט לתת פקטור של 4 נק' לכל התלמידים.
חשבו את המדדים לאחר הפקטור.

4) דגמו מקן ייצור 50 קופסאות של גפרורים. בדקו בכל קופסא בה יש 40 גפרורים את כמות הגפרורים הפגומים. התקבל שבממוצע יש 3 גפרורים פגומים בקופסא, עם סטיית תקן של 1.5 גפרורים.
מה יהיה הממוצע ומה תהיה סטיית התקן של מספר התקינים בקופסא?

5) חברת בזק הציעה את ההצעה הבאה: שלושים שקלים דמי מנוי חודשיים קבועים וכן 10 אגורות לכל דקה של שיחה יוצאת. אדם בדק במשך שנה את דקות השיחות היוצאות שלו, וקיבל שבממוצע חודשי יש לו 600 דקות שיחות יוצאות עם שונות של 2500 דקות רבועות, כמו כן בחודש ינואר ציון התקן היה 2.
חשבו את המדדים הללו עבור חשבון הטלפון החודשי של אותו אדם בשקלים אם היה משתמש בחבילה המוצעת לו על ידי בזק.

6) הוכיחו שאם כל התצפיות בהתפלגות עברו טרנספורמציה לינארית: $Y_i = a\cdot X_i + b$,
אזי הממוצע והשונות של כלל התצפיות לאחר הטרנספורמציה יהיו בהתאמה:
$\bar{y} = a\cdot\bar{x}+b, S_y^2 = a^2 S_x^2$.

תשובות סופיות:

1) ממוצע: 315, סטיית תקן: 60, שכיח: 275.
2) ממוצע: 46, שונות: 30.25.
3) טווח: 40, חציון: 77, עשירון עליון: 91.
4) ממוצע: 37, סטיית תקן: 1.5.
5) ממוצע: 90, שונות: 25, ציון תקן: 2.
6) $a^2 \cdot S_x^2$.